

II. 13.
H. 42.

BHS
II K
42

Grünert's Methode
zur Bestimmung
der Polhöhe

236

BHS II K 42

V e r s u c h

einer neuen

Methode zur Bestimmung der Polhöhe oder geographischen Breite

bei

geodätischen Messungen.

Von

Johann August Grunert,

Doctor der Philosophie und ordentlichem Professor der Mathematik an der Universität zu Greifswald, Ehrenmitgliede der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Erfurt und der Gesellschaft zur Verbreitung der mathematischen Wissenschaften zu Hamburg, auswärtigem Mitgliede der Königl. Böhmisches Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag, correspondirendem Mitgliede der Königl. Baierischen Akademie der Wissenschaften zu München, ordentlichem Mitgliede der naturforschenden Gesellschaften zu Danzig und zu Halle.



Leipzig, 1844.

Bei E. B. Schwickert.

V e r s u c h

Geogr. Anstalt

Methode zur Bestimmung der Polhöhe oder geographischen Breite



geographischen Messungen

Von

Johann August Grunert.

Doctor der Philosophie und ordentlichem Professor der Mathematik an der Universität
zu Greifswald, Ehrenmitglied der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften
zu Berlin und der Gesellschaft zur Verbreitung der mathematischen Wissenschaften
zu Hamburg, auswärtiges Mitglied der Königl. Böhmisches Gesellschaft der
Wissenschaften zu Prag, correspondirendes Mitglied der Königl. Bayerischen
Akademie der Wissenschaften zu München, ordentlichem Mitglied der
naturforschenden Gesellschaft zu Bonn und zu Halle.



V o r w o r t.

Ueber den Zweck, welchen ich mit dieser kleinen Schrift zu erreichen suche, habe ich mich im Eingange zu derselben so ausführlich ausgesprochen, dass hier gewiss die Erklärung genügen wird, dass ich in derselben den Versuch gemacht habe, dem Geodäten eine in der Praxis brauchbare Methode zur Bestimmung der Polhöhe oder geographischen Breite in die Hände zu liefern, mittelst welcher er zu der Bestimmung dieses wichtigen Elements bloss mit Hülfe des Werkzeuges, mit dem er überhaupt alle seine Messungen ausführt, nämlich des Theodoliten, also namentlich ganz ohne Uhr, auf eine zweckmässige und leichte Weise, ohne Voraussetzung vieler astronomischer Kenntnisse und Fertigkeiten, zu gelangen im Stande ist. Dass ich mich einer ausführlichen theoretischen Untersuchung der Fehler dieser Methode nicht entzogen, sondern derselben vielmehr eine ganz besondere Aufmerksamkeit gewidmet habe, wird man in der Schrift selbst finden. Mein Wunsch und mein Zweck ist vollkommen erreicht, wenn diese Methode vielleicht Veranlassung geben sollte, dass künftig auch mit nicht gerade ganz in's Grosse gehen-

den geodätischen Operationen öfter als bisher Polhöhenbestimmungen, die bis jetzt fast immer nur den eigentlichen Astronomen anheim gestellt worden sind, verbunden werden, indem auf diese Weise, wie ich glaube, wenn auch solche Bestimmungen hin und wieder noch einiger Berichtigung bedürfen sollten, doch mancher nützliche und dankenswerthe Beitrag zur Geographie geliefert werden kann.

Greifswald, im August 1843.

Der Verfasser.

§. 1.

Alle vorzüglich zum Gebrauch in der Geodäsie in Vorschlag gebrachte, zu meiner Kenntniss gelangte Methoden zur Bestimmung der Polhöhe, worüber man u. A. *Traité de Géodésie par Puissant. Tome II. Livre V. Chapitre IV.* und *Géodésie ou Traité de la figure de la terre et de ses parties par L. B. Francoeur. Bruxelles. 1838. p. 353.*, oder *Lehrbuch der praktischen Geometrie von G. E. J. Ulrich. Zweiter Band. Göttingen. 1838. S. 94.*, auch *Lehrbuch der höhern Geodäsie von A. Decker. Mannheim. 1836. S. 190.* nachsehen kann, setzen den Gebrauch einer genauen Uhr, viele auch, — jedoch mit Ausnahme der bekannten trefflichen Methoden von Gauss und Bessel, — den Gebrauch eines genauen Höhen messenden Instruments voraus, und nehmen meistens eine grössere Anzahl astronomischer Vorkenntnisse und Fertigkeiten in Anspruch, welche sich bei allen denen, die bei ihren sonstigen praktischen Arbeiten zu Polhöhenbestimmungen Gelegenheit und Veranlassung finden können, nicht immer in dem erforderlichen Maasse werden voraussetzen lassen.

Immer hat es mir wünschenswerth geschienen, dass auch mit nicht ganz in's Grosse gehenden geodätischen Operationen häufiger als bisher Polhöhenbestimmungen verbunden werden möchten, wodurch gewiss dankenswerthe, wenn auch allerdings hin und wieder noch mancher spätern weiteren Berichtigung bedürfende Beiträge zur Geographie geliefert werden könnten. Soll dies aber unter den bestehenden Verhältnissen möglich sein, so muss nach meiner Meinung den Geodäten eine Methode zur Ausführung dieser Bestimmungen in die Hände gegeben werden, welche vor allen Dingen leicht in der Anwendung ist und ausser dem Instrumente, mit welchem der Geodät überhaupt alle seine nicht bloss zur Befriedigung der rohesten Bedürfnisse bestimmten Messungen ausführt, nämlich dem Azimuthaltheodoliten, der gegenwärtig auch bei kleinern Dimensionen in einer früher nie geahnten

Vollkommenheit zu mässigen Preisen aus den Werkstätten mehrerer ausgezeichneten Künstler hervorgeht, den Gebrauch gar keines anderen Instruments, insbesondere nicht den Gebrauch einer genauen Uhr, in Anspruch nimmt, endlich auch, mit Ausnahme der in jedem Lehrbuche sich findenden astronomischen Grundbegriffe, die sich Jeder leicht aneignen kann, besondere astronomische Kenntnisse und Fertigkeiten nicht voraussetzt. Eine allen diesen Erfordernissen so viel als möglich genügende Methode zu entwickeln, und dadurch vielleicht manchem Geodäten einen Dienst zu leisten, und der Geographie einigen Nutzen zu bringen, ist der alleinige Zweck der vorliegenden kleinen Schrift.

§. 2.

Das der in Rede stehenden Methode zum Grunde liegende Princip ist aber im Wesentlichen nicht verschieden von dem Princip, welches Gauss seiner bekannten, andere Zwecke zu erreichen suchenden schönen Methode: aus den an einer Uhr, die entweder genau nach Sternzeit geht, oder deren vierundzwanzigstündiger oder täglicher Gang gegen Sternzeit wenigstens als genau bekannt vorausgesetzt wird, beobachteten Zwischenzeiten zwischen den Momenten, wo drei ihrer Lage auf der Sphäre nach bekannte Sterne gleiche, übrigens willkührliche und ihrer wirklichen Grösse nach völlig unbekannte Höhen erreichen, die Polhöhe und den Stand der Uhr gegen Sternzeit zu bestimmen, — zum Grunde gelegt hat, indem bei der Methode, deren Entwicklung die folgenden Blätter gewidmet sein werden, an die Stelle der mit der Uhr beobachteten Zeitdifferenzen nur die mit dem Theodoliten gemessenen Azimuthaldifferenzen gesetzt werden; und diese Methode kommt daher im Allgemeinen auf das Folgende zurück, wobei wir, um auch Ungeübten hinreichend deutlich zu werden, zugleich andeuten wollen, wie man sich bei den anzustellenden Beobachtungen in der Praxis am besten zu verhalten haben wird, mehrere andere in dieser Beziehung wichtige Bemerkungen aber dem weiteren Fortgange unserer Untersuchung vorbehalten müssen. Die Einrichtung und die Regeln zur Berichtigung und genauen Aufstellungen des Theodoliten werden natürlich als bekannt vorausgesetzt; jedoch erlaube ich mir rücksichtlich dieser Gegenstände auf meine Geodäsie oder die Lehre vom Aufnehmen, das Nivelliren und die Markscheidekunst. Leipzig. 1842. S. 149. zu verweisen, wo man alles Nöthige mit, wie ich glaube, hinreichender Vollständigkeit im Zusammenhange nachlesen kann.

Man wählt aus einem Sternverzeichnisse drei Sterne, deren Positionen auf der Sphäre, d. h. deren Rectascensionen

und Declinationen*) als sehr genau bekannt angenommen werden können, und stellt das Fernrohr des vorher sorgfältig berichtigten und gehörig aufgestellten Theodoliten in einer beliebigen Höhe, die jedoch jedenfalls nicht grösser als die kleinste unter den Culminationshöhen der drei Sterne sein darf, und um die Zeit, wo man die Beobachtungen anstellen beabsichtigt, von jedem derselben wirklich erreicht werden muss, unveränderlich fest, wobei es nöthig ist, dass das Fernrohr, ohne dass der Theodolit übrigens einen Höhenkreis zu haben braucht, durchgeschlagen werden kann, oder dass der Theodolit wie viele neuere Instrumente dieser Art mit einem sogenannten gebrochenen Fernrohre versehen ist, damit sich das Fernrohr bequem in jeder beliebigen Höhe feststellen lässt, eine Einrichtung, die freilich noch nicht alle zunächst und vorzugsweise zu geodätischen Messungen bestimmte Theodoliten haben**); auch muss der Theodolit mit einer Vorrichtung zur Erleuchtung der Fäden des Fadennetzes bei Abend, etwa mit einem sogenannten Illuminator (m. s. meine Geodäsie S. 178.) versehen sein. Hierauf fasst man einen der drei Sterne, welcher noch nicht völlig die Höhe, auf welche das Fernrohr gestellt worden ist, erreicht haben darf, durch Drehung der die Nonien und das Fernrohr tragenden messingenen Kappe unter den Vertikalfaden des Fadennetzes im Fernrohre, stellt die in Rede stehende Kappe fest, und hält nun durch sanfte Bewegung der betreffenden Mikrometerschraube den Stern so lange unter dem Vertikalfaden des Fadennetzes fest, bis derselbe genau im Mittelpunkt des Fadennetzes, d. h. genau in der Richtung der optischen Axe des Fernrohrs erscheint, in welchem Moment man die Mikrometerschraube zu bewegen aufhört, und nun die Nonien des Azimuthalkreises des Theodoliten abliest. Stellt man, ohne die Höhe des Fernrohrs im Geringsten zu ändern, ganz dieselbe Beobachtung auch bei den andern der drei ausgewählten Sterne an, so kann man, wie ohne weitere Erläuterung auf der Stelle erhellen wird, aus den auf dem Limbus gemachten Ablesungen die den Momenten, wo die drei Sterne in der Richtung der optischen Axen des während der ganzen Operation in Bezug auf seine Lage gegen die messingene

*) Beabsichtigt man nichts weiter als die Bestimmung der Polhöhe, so brauchen bloss die Declinationen bekannt zu sein.

***) Auch bei den schönen vorzugsweise zu geodätischen Messungen bestimmten sechszölligen Theodoliten von Pistor, deren Beschreibung man in meiner Geodäsie a. a. O. findet, kann das Fernrohr nicht durchgeschlagen werden. Dessenungeachtet werde ich die übrige Einrichtung dieser Theodoliten, die sich in ähnlicher Weise bei fast allen übrigen neueren Theodoliten findet, bei der folgenden Untersuchung vorzüglich in's Auge fassen.

Kappe, von welcher es getragen wird, völlig unverrückt stehen gebliebenen Fernrohrs erscheinen, entsprechenden Azimuthal-differenzen der drei Sterne durch ganz leichte Rechnung ermitteln, und kann dann, wie die spätere mathematische Entwicklung zeigen wird, in Verbindung mit den bekannten Declinationen der drei Sterne alle zur Berechnung der Polhöhe nöthigen Data erhalten.

Wenn wir nun auch hierdurch allerdings unsern eigentlichen Zweck, — die Bestimmung der Polhöhe, — wie wir weiter unten sehen werden, vollständig zu erreichen im Stande sind, so können doch aus den obigen Beobachtungen, wenn mit denselben die Beobachtung einer genauen Uhr verbunden werden kann, noch manche andere in astronomischer Rücksicht wichtige Resultate gezogen werden, weshalb wir, um unseren Untersuchungen eine grössere Vollständigkeit und grösseren wissenschaftlichen Gehalt zu geben, und die von unserer Methode gewährten Vortheile noch besser in's Licht zu stellen, im Folgenden annehmen wollen, dass in den drei Momenten, wo man dem Obigen zufolge mit dem Drehen der Mikrometerschraube des Theodoliten einhält, die Zeiten einer genauen Uhr, welche übrigens hierbei in jeder Beziehung als völlig unberichtigt angenommen wird, genau notirt worden seien, werden aber die bloss zur Bestimmung der Polhöhe nöthigen Formeln, wobei der Gebrauch der Uhr gar nicht vorausgesetzt wird, besonders hervorzuheben nicht unterlassen.

§. 3.

Zunächst wollen wir jetzt, um im Folgenden so wenig wie möglich astronomische Vorkenntnisse in Anspruch zu nehmen, die wichtigsten Grundformeln der sphärischen Astronomie mit Hülfe der Formeln der analytischen Geometrie in völliger Allgemeinheit entwickeln, und werden uns dabei durchgängig der folgenden Bezeichnungen bedienen:

Polhöhe	φ
Höhe eines Sterns	h
Zenithdistanz eines Sterns	z
Azimuth eines Sterns . . .	ω
Stundenwinkel eines Sterns	σ
Declination eines Sterns . .	δ
Polardistanz eines Sterns . .	p
Rectascension eines Sterns	α

Alle diese Elemente werden auf die aus den ersten Anfangsgründen der Astronomie hinreichend bekannte Weise genommen. Nur rücksichtlich des Azimuths wollen wir bemerken, dass dasselbe im Folgenden immer von Süden an durch Westen hindurch: also im Sinne der täglichen Bewegung der Sphäre,

von 0 bis 360° gezählt werden soll, welches uns der Natur der Sache am angemessensten zu sein scheint.

Um die zwischen den genannten Elementen Statt findenden, für die ganze Astronomie höchst wichtigen allgemeinen Relationen zu entwickeln, nehmen wir den Mittelpunkt der Sphäre als den Anfang zweier rechtwinkligen Coordinatensysteme der xyz und $x_1 y_1 z_1$ an. Die Ebene der xy soll die Ebene des Horizonts, und die positiven Theile der Axen der x und y sollen vom Mittelpunkte der Sphäre an respective nach Süden und nach Westen, der positive Theil der Axe der z aber soll vom Mittelpunkte der Sphäre an nach dem Zenith gerichtet sein, wobei wir grösserer Einfachheit und Bestimmtheit wegen, und um jede Verwirrung zu vermeiden, im Folgenden die Himmelserscheinungen immer nur so auffassen werden, wie sie in der nördlichen Hemisphäre der Erde sich darstellen. Die Ebene der $x_1 y_1$ soll die Ebene des Aequators sein, der positive Theil der Axe der x_1 sei die Durchschnittslinie der Ebene des Aequators mit der Ebene der südlichen Hälfte des Meridians, der positive Theil der Axe der y_1 soll vom Mittelpunkte der Sphäre an nach Westen, der positive Theil der Axe der z_1 soll vom Mittelpunkte der Sphäre an nach dem nördlichen Himmelpole gerichtet sein. Dies vorausgesetzt, ist offenbar, wenn die Coordinaten x, y, z und x_1, y_1, z_1 sich auf denselben Stern in demselben Zeitmomente beziehen, und der Halbmesser der Sphäre immer der Längeneinheit gleich gesetzt wird, in völliger Allgemeinheit:

$$1) \begin{cases} x = \cos \omega \cos h, \\ y = \sin \omega \cos h, \\ z = \sin h \end{cases}$$

und

$$2) \begin{cases} x_1 = \cos \sigma \cos \delta, \\ y_1 = \sin \sigma \cos \delta, \\ z_1 = \sin \delta. \end{cases}$$

Nach den allgemeinen Formeln der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten*) hat man aber offenbar die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= x_1 \cos(90^\circ - \varphi) - z_1 \sin(90^\circ - \varphi), \\ y &= y_1, \\ z &= x_1 \sin(90^\circ - \varphi) + z_1 \cos(90^\circ - \varphi); \end{aligned}$$

also

$$3) \begin{cases} x = x_1 \sin \varphi - z_1 \cos \varphi, \\ y = y_1, \\ z = x_1 \cos \varphi + z_1 \sin \varphi; \end{cases}$$

aus denen sehr leicht auf dem Wege der gewöhnlichen alge-

*) M. s. meine Elemente der analytischen Geometrie. Thl. I. Leipzig. 1839. S. 31.

braischen Elimination mit Hülfe der bekannten goniometrischen Gleichung

$$\sin \varphi^2 + \cos \varphi^2 = 1$$

umgekehrt

$$4) \begin{cases} x_1 = x \sin \varphi + z \cos \varphi, \\ y_1 = y, \\ z_1 = -x \cos \varphi + z \sin \varphi \end{cases}$$

erhalten wird.

Führt man nun in diese beiden Systeme von Gleichungen zwischen den Coordinaten x, y, z und x_1, y_1, z_1 die aus dem Obigen bekannten Ausdrücke dieser Coordinaten ein, so ergeben sich sogleich die beiden nachstehenden Systeme von Gleichungen:

$$5) \begin{cases} \cos \omega \cos h = \cos \sigma \cos \delta \sin \varphi - \sin \delta \cos \varphi, \\ \sin \omega \cos h = \sin \sigma \cos \delta, \\ \sin h = \cos \sigma \cos \delta \cos \varphi + \sin \delta \sin \varphi \end{cases}$$

und

$$6) \begin{cases} \cos \sigma \cos \delta = \cos \omega \cos h \sin \varphi + \sin h \cos \varphi, \\ \sin \sigma \cos \delta = \sin \omega \cos h, \\ \sin \delta = -\cos \omega \cos h \cos \varphi + \sin h \sin \varphi. \end{cases}$$

Dividirt man die erste Gleichung des ersten Systems durch die zweite Gleichung dieses Systems, so erhält man

$$\cot \omega = \frac{\cos \sigma \sin \varphi - \tan \delta \cos \varphi}{\sin \sigma},$$

und hieraus

$$\tan \delta = \frac{\cos \sigma \sin \varphi - \sin \sigma \cot \omega}{\cos \varphi}.$$

Dividirt man auf ähnliche Art die erste Gleichung des zweiten Systems durch die zweite Gleichung dieses Systems, so erhält man

$$\cot \sigma = \frac{\cos \omega \sin \varphi + \tan h \cos \varphi}{\sin \omega},$$

und hieraus

$$\tan h = \frac{\cot \sigma \sin \omega - \cos \omega \sin \varphi}{\cos \varphi}.$$

Also hat man noch die beiden folgenden Systeme von Gleichungen:

$$7) \begin{cases} \cot \omega = \frac{\cos \sigma \sin \varphi - \tan \delta \cos \varphi}{\sin \sigma}, \\ \tan h = \frac{\cot \sigma \sin \omega - \cos \omega \sin \varphi}{\cos \varphi} \end{cases}$$

und

$$8) \begin{cases} \cot \sigma = \frac{\cos \omega \sin \varphi + \tan h \cos \varphi}{\sin \omega}, \\ \tan \delta = \frac{\cos \sigma \sin \varphi - \sin \sigma \cot \omega}{\cos \varphi}. \end{cases}$$

Führt man in die vorhergehenden vier Systeme von Formeln statt der Höhe h und Declination δ die Zenithdistanz z und Polardistanz p ein, so werden dieselben:

$$5^*) \begin{cases} \cos \omega \sin z = \cos \sigma \sin p \sin \varphi - \cos p \cos \varphi, \\ \sin \omega \sin z = \sin \sigma \sin p, \\ \cos z = \cos \sigma \sin p \cos \varphi + \cos p \sin \varphi; \end{cases}$$

$$6^*) \begin{cases} \cos \sigma \sin p = \cos \omega \sin z \sin \varphi + \cos z \cos \varphi, \\ \sin \sigma \sin p = \sin \omega \sin z, \\ \cos p = -\cos \omega \sin z \cos \varphi + \cos z \sin \varphi; \end{cases}$$

$$7^*) \begin{cases} \cot \omega = \frac{\cos \sigma \sin \varphi - \cot p \cos \varphi}{\sin \sigma}, \\ \cot z = \frac{\cot \sigma \sin \omega - \cos \omega \sin \varphi}{\cos \varphi}; \end{cases}$$

$$8^*) \begin{cases} \cot \sigma = \frac{\cos \omega \sin \varphi + \cot z \cos \varphi}{\sin \omega}, \\ \cot p = \frac{\cos \sigma \sin \varphi - \sin \sigma \cot \omega}{\cos \varphi}. \end{cases}$$

§. 4.

Wir wollen jetzt die bekannten Declinationen der drei beobachteten Sterne, wobei §. 2. zu vergleichen ist, durch $\delta, \delta', \delta''$; die gemeinschaftliche Höhe, in welcher dieselben nach §. 2. beobachtet worden sind, durch h ; die entsprechenden Azimuthe durch $\omega, \omega', \omega''$; die entsprechenden Stundenwinkel durch $\sigma, \sigma', \sigma''$; die Polhöhe wie früher durch φ bezeichnen, und wollen, wozu wir nach §. 2. berechtigt sind, die Azimuthaldifferenzen $\omega' - \omega$ und $\omega'' - \omega$ als bekannt annehmen.

Dies vorausgesetzt, haben wir nun nach der dritten der Gleichungen 6) die drei folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \sin h \sin \varphi - \cos \omega \cos h \cos \varphi, \\ \sin \delta' &= \sin h \sin \varphi - \cos \omega' \cos h \cos \varphi, \\ \sin \delta'' &= \sin h \sin \varphi - \cos \omega'' \cos h \cos \varphi. \end{aligned}$$

Multipliziert man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$\cos \omega' - \cos \omega'', \quad \cos \omega'' - \cos \omega, \quad \cos \omega - \cos \omega',$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man, weil

$$(\cos \omega' - \cos \omega'') + (\cos \omega'' - \cos \omega) + (\cos \omega - \cos \omega') = 0$$

und auch

$$\left. \begin{aligned} &\cos \omega (\cos \omega' - \cos \omega'') \\ &+ \cos \omega' (\cos \omega'' - \cos \omega) \\ &+ \cos \omega'' (\cos \omega - \cos \omega') \end{aligned} \right\} = 0$$

ist, die folgende, h und φ gar nicht mehr enthaltende Gleichung zwischen den Declinationen $\delta, \delta', \delta''$ und den Azimuthen $\omega, \omega', \omega''$:

$$9) \left. \begin{aligned} & \sin \delta (\cos \omega' - \cos \omega'') \\ & + \sin \delta' (\cos \omega'' - \cos \omega) \\ & + \sin \delta'' (\cos \omega - \cos \omega') \end{aligned} \right\} = 0,$$

oder

$$10) \left. \begin{aligned} & (\sin \delta' - \sin \delta'') \cos \omega \\ & + (\sin \delta'' - \sin \delta) \cos \omega' \\ & + (\sin \delta - \sin \delta') \cos \omega'' \end{aligned} \right\} = 0;$$

oder, weil bekanntlich

$$\begin{aligned} \sin \delta' - \sin \delta'' &= 2 \sin \frac{1}{2} (\delta' - \delta'') \cos \frac{1}{2} (\delta' + \delta''), \\ \sin \delta'' - \sin \delta &= 2 \sin \frac{1}{2} (\delta'' - \delta) \cos \frac{1}{2} (\delta'' + \delta), \\ \sin \delta - \sin \delta' &= 2 \sin \frac{1}{2} (\delta - \delta') \cos \frac{1}{2} (\delta + \delta') \end{aligned}$$

ist, die Gleichung

$$11) \left. \begin{aligned} & \sin \frac{1}{2} (\delta' - \delta'') \cos \frac{1}{2} (\delta' + \delta'') \cos \omega \\ & + \sin \frac{1}{2} (\delta'' - \delta) \cos \frac{1}{2} (\delta'' + \delta) \cos \omega' \\ & + \sin \frac{1}{2} (\delta - \delta') \cos \frac{1}{2} (\delta + \delta') \cos \omega'' \end{aligned} \right\} = 0,$$

d. i., wenn der Kürze wegen

$$12) \left\{ \begin{aligned} A &= \sin \frac{1}{2} (\delta' - \delta'') \cos \frac{1}{2} (\delta' + \delta''), \\ B &= \sin \frac{1}{2} (\delta'' - \delta) \cos \frac{1}{2} (\delta'' + \delta), \\ C &= \sin \frac{1}{2} (\delta - \delta') \cos \frac{1}{2} (\delta + \delta') \end{aligned} \right.$$

gesetzt wird, die Gleichung

$$13) A \cos \omega + B \cos \omega' + C \cos \omega'' = 0.$$

Weil nun aber die Azimuthaldifferenzen $\omega' - \omega$, $\omega'' - \omega$ bekannt sind, und

$$\omega' = \omega + (\omega' - \omega), \quad \omega'' = \omega + (\omega'' - \omega)$$

ist, so kann man die vorstehende Gleichung auf die Form

$$13*) \left. \begin{aligned} & A \cos \omega \\ & + B \cos \{\omega + (\omega' - \omega)\} \\ & + C \cos \{\omega + (\omega'' - \omega)\} \end{aligned} \right\} = 0$$

bringen. Unter dieser Form enthält die Gleichung nur die eine unbekannte Grösse ω , die sich also mittelst derselben muss bestimmen lassen, und in der That erhält man, weil

$$\begin{aligned} \cos \{\omega + (\omega' - \omega)\} &= \cos (\omega' - \omega) \cos \omega - \sin (\omega' - \omega) \sin \omega, \\ \cos \{\omega + (\omega'' - \omega)\} &= \cos (\omega'' - \omega) \cos \omega - \sin (\omega'' - \omega) \sin \omega \end{aligned}$$

ist, ohne die geringste Schwierigkeit

$$14) \tan \omega = \frac{A + B \cos (\omega' - \omega) + C \cos (\omega'' - \omega)}{B \sin (\omega' - \omega) + C \sin (\omega'' - \omega)},$$

mittelst welcher Formel sich also $\tan \omega$ bestimmen lässt.

Ein anderer Ausdruck für $\tan \omega$ kann auf folgende Art gefunden werden. Aus den drei aus dem Obigen bekannten Gleichungen

$$\sin \delta = \sin h \sin \varphi - \cos \omega \cos h \cos \varphi,$$

$$\sin \delta' = \sin h \sin \varphi - \cos \omega' \cos h \cos \varphi,$$

$$\sin \delta'' = \sin h \sin \varphi - \cos \omega'' \cos h \cos \varphi$$

erhält man durch Subtraction der zweiten und dritten von der ersten

$$15) \begin{cases} \sin \delta - \sin \delta' = -(\cos \omega - \cos \omega') \cos h \cos \varphi, \\ \sin \delta - \sin \delta'' = -(\cos \omega - \cos \omega'') \cos h \cos \varphi; \end{cases}$$

also

$$16) \frac{\sin \delta - \sin \delta'}{\sin \delta - \sin \delta''} = \frac{\cos \omega - \cos \omega'}{\cos \omega - \cos \omega''}$$

oder

$$17) \frac{\sin \delta - \sin \delta'}{\sin \delta - \sin \delta''} = \frac{\cos \omega - \cos \{\omega + (\omega' - \omega)\}}{\cos \omega - \cos \{\omega + (\omega'' - \omega)\}},$$

und folglich nach bekannten goniometrischen Formeln, wenn der Kürze wegen

$$18) \begin{cases} M = \sin \frac{1}{2}(\delta - \delta') \cos \frac{1}{2}(\delta + \delta') \sin \frac{1}{2}(\omega'' - \omega), \\ N = \sin \frac{1}{2}(\delta - \delta'') \cos \frac{1}{2}(\delta + \delta'') \sin \frac{1}{2}(\omega' - \omega) \end{cases}$$

gesetzt wird,

$$19) \frac{\sin \{\omega + \frac{1}{2}(\omega' - \omega)\}}{\sin \{\omega + \frac{1}{2}(\omega'' - \omega)\}} = \frac{M}{N},$$

woraus, wenn man

$$\begin{aligned} & \sin \{\omega + \frac{1}{2}(\omega' - \omega)\} \\ &= \sin \frac{1}{2}(\omega' - \omega) \cos \omega + \cos \frac{1}{2}(\omega' - \omega) \sin \omega, \\ & \sin \{\omega + \frac{1}{2}(\omega'' - \omega)\} \\ &= \sin \frac{1}{2}(\omega'' - \omega) \cos \omega + \cos \frac{1}{2}(\omega'' - \omega) \sin \omega \end{aligned}$$

setzt, und im Zähler und Nenner des Bruchs auf der linken Seite des Gleichheitszeichens durch $\cos \omega$ dividirt,

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\omega' - \omega) + \cos \frac{1}{2}(\omega' - \omega) \tan \omega}{\sin \frac{1}{2}(\omega'' - \omega) + \cos \frac{1}{2}(\omega'' - \omega) \tan \omega} = \frac{M}{N},$$

also

$$20) \tan \omega = - \frac{M \sin \frac{1}{2}(\omega'' - \omega) - N \sin \frac{1}{2}(\omega' - \omega)}{M \cos \frac{1}{2}(\omega'' - \omega) - N \cos \frac{1}{2}(\omega' - \omega)}$$

erhalten wird. Setzt man

$$21) \begin{cases} E = 2 \sin \frac{1}{2}(\delta - \delta') \cos \frac{1}{2}(\delta + \delta') \sin \frac{1}{2}(\omega'' - \omega)^2, \\ F = 2 \sin \frac{1}{2}(\delta - \delta'') \cos \frac{1}{2}(\delta + \delta'') \sin \frac{1}{2}(\omega' - \omega)^2, \\ G = \sin \frac{1}{2}(\delta - \delta') \cos \frac{1}{2}(\delta + \delta') \sin(\omega'' - \omega), \\ H = \sin \frac{1}{2}(\delta - \delta'') \cos \frac{1}{2}(\delta + \delta'') \sin(\omega' - \omega); \end{cases}$$

so ist

$$22) \tan \omega = - \frac{E - F}{G - H}.$$

Noch ein Ausdruck zur Berechnung von ω kann auf folgende Art gefunden werden. Aus der Gleichung 19) ergiebt sich leicht

$$\frac{\sin \left\{ \omega + \frac{1}{2} (\omega' - \omega) \right\} - \sin \left\{ \omega + \frac{1}{2} (\omega'' - \omega) \right\}}{\sin \left\{ \omega + \frac{1}{2} (\omega' - \omega) \right\} + \sin \left\{ \omega + \frac{1}{2} (\omega'' - \omega) \right\}} = \frac{M - N}{M + N},$$

also, weil nach bekannten goniometrischen Formeln

$$\begin{aligned} & \sin \left\{ \omega + \frac{1}{2} (\omega' - \omega) \right\} - \sin \left\{ \omega + \frac{1}{2} (\omega'' - \omega) \right\} \\ &= 2 \sin \frac{1}{4} \{ (\omega' - \omega) - (\omega'' - \omega) \} \cos \left\{ \omega + \frac{1}{4} (\omega' - \omega) + \frac{1}{4} (\omega'' - \omega) \right\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \sin \left\{ \omega + \frac{1}{2} (\omega' - \omega) \right\} + \sin \left\{ \omega + \frac{1}{2} (\omega'' - \omega) \right\} \\ &= 2 \cos \frac{1}{4} \{ (\omega' - \omega) - (\omega'' - \omega) \} \sin \left\{ \omega + \frac{1}{4} (\omega' - \omega) + \frac{1}{4} (\omega'' - \omega) \right\} \end{aligned}$$

ist,

$$\tan \frac{1}{4} \{ (\omega' - \omega) - (\omega'' - \omega) \} \cot \left\{ \omega + \frac{1}{4} (\omega' - \omega) + \frac{1}{4} (\omega'' - \omega) \right\} = \frac{M - N}{M + N},$$

und folglich

$$\begin{aligned} 23) \quad & \tan \left\{ \omega + \frac{1}{4} (\omega' - \omega) + \frac{1}{4} (\omega'' - \omega) \right\} \\ &= \frac{M + N}{M - N} \tan \frac{1}{4} \{ (\omega' - \omega) - (\omega'' - \omega) \}. \end{aligned}$$

Berechnet man den Hülfswinkel η mittelst der Formel

$$24) \quad \tan \eta = \frac{N}{M},$$

so ist

$$\frac{M + N}{M - N} = \frac{1 + \tan \eta}{1 - \tan \eta} = \tan (45^\circ + \eta),$$

und folglich

$$\begin{aligned} 25) \quad & \tan \left\{ \omega + \frac{1}{4} (\omega' - \omega) + \frac{1}{4} (\omega'' - \omega) \right\} \\ &= \tan (45^\circ + \eta) \tan \frac{1}{4} \{ (\omega' - \omega) - (\omega'' - \omega) \}. \end{aligned}$$

Weil nun nach dem Obigen

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \sin h \sin \varphi - \cos \omega \cos h \cos \varphi, \\ \sin \delta' &= \sin h \sin \varphi - \cos \omega' \cos h \cos \varphi; \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} \sin \delta - \sin \delta' &= -(\cos \omega - \cos \omega') \cos h \cos \varphi, \\ \sin \delta \cos \omega' - \sin \delta' \cos \omega &= -(\cos \omega - \cos \omega') \sin h \sin \varphi \end{aligned}$$

ist; so ist, wenn man der Kürze wegen

$$26) \quad \begin{cases} K = -\frac{\sin \delta - \sin \delta'}{\cos \omega - \cos \omega'}, \\ L = -\frac{\sin \delta \cos \omega' - \sin \delta' \cos \omega}{\cos \omega - \cos \omega'} \end{cases}$$

oder

$$27) \quad \begin{cases} K = \frac{\sin \frac{1}{2} (\delta - \delta') \cos \frac{1}{2} (\delta + \delta')}{\sin \frac{1}{2} (\omega - \omega') \sin \frac{1}{2} (\omega + \omega')}, \\ L = \frac{\sin \delta \cos \omega' - \sin \delta' \cos \omega}{\sin \frac{1}{2} (\omega - \omega') \sin \frac{1}{2} (\omega + \omega')} \end{cases}$$

setzt,

$$28) \begin{cases} K = \cos h \cos \varphi, \\ L = \sin h \sin \varphi; \end{cases}$$

also

$$29) \begin{cases} \cos(h - \varphi) = K + L, \\ \cos(h + \varphi) = K - L; \end{cases}$$

oder, wie man hieraus mit Hülfe von 26) leicht findet,

$$30) \begin{cases} \cos(h - \varphi) = \frac{\sin \delta \cos \frac{1}{2} \omega'^2 - \sin \delta' \cos \frac{1}{2} \omega^2}{\sin \frac{1}{2} (\omega - \omega') \sin \frac{1}{2} (\omega + \omega')}, \\ \cos(h + \varphi) = \frac{\sin \delta \sin \frac{1}{2} \omega'^2 - \sin \delta' \sin \frac{1}{2} \omega^2}{\sin \frac{1}{2} (\omega - \omega') \sin \frac{1}{2} (\omega + \omega')}. \end{cases}$$

Durch Einführung von Hülfswinkeln würden sich diese Ausdrücke leicht noch bequemer zur logarithmischen Rechnung einrichten lassen, wobei wir jedoch nicht länger verweilen wollen.

Wenn man das stets positive, 360° nicht übersteigende Azimuth ω mittelst einer der drei Formeln 14), 20), 22) berechnet, so bleibt es unbestimmt, ob ω zwischen 0 und 180° oder zwischen 180° und 360° genommen werden muss; und bezeichnen wir also den zwischen 0 und 180° liegenden Werth von ω durch μ , so kann jedes der drei Azimuthe ω , ω' , ω'' zwei Werthe haben, indem nämlich entweder

$$\begin{aligned} \omega &= \mu, \\ \omega' &= \mu + (\omega' - \omega), \\ \omega'' &= \mu + (\omega'' - \omega) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \omega &= 180^\circ + \mu, \\ \omega' &= 180^\circ + \mu + (\omega' - \omega), \\ \omega'' &= 180^\circ + \mu + (\omega'' - \omega) \end{aligned}$$

sein kann. Welches dieser beiden Systeme von Werthen der Azimuthe ω , ω' , ω'' man zu nehmen hat, lässt sich aber ohne Schwierigkeit auf folgende Art entscheiden. Für

$$\omega = \mu, \quad \omega' = \mu + (\omega' - \omega)$$

und

$$\omega = 180^\circ + \mu, \quad \omega' = 180^\circ + \mu + (\omega' - \omega)$$

erhält, wie sich aus 26) auf der Stelle ergibt, die oben durch K bezeichnete Grösse offenbar jederzeit entgegengesetzte Vorzeichen. Wegen der ersten der beiden Gleichungen 28) ist aber K offenbar stets eine positive Grösse, und man muss also jederzeit dasjenige der beiden obigen Systeme von Werthen der Azimuthe ω , ω' , ω'' nehmen, welchem der positive Werth von K entspricht, so dass also hiernach nie ein Zweifel obwalten kann, wie die Azimuthe ω , ω' , ω'' zu nehmen sind.

Wenn man das Azimuth ω mittelst einer der Formeln 23) oder 25) bestimmt, so ist, wenn λ den seiner absoluten Grösse nach kleinsten Werth von

$$\omega + \frac{1}{4}(\omega' - \omega) + \frac{1}{4}(\omega'' - \omega)$$

bezeichnet, bekanntlich*)

$$\omega + \frac{1}{4}(\omega' - \omega) + \frac{1}{4}(\omega'' - \omega) = \lambda + k \cdot 180^\circ,$$

wo k jede positive oder negative ganze Zahl sein kann. Also ist

$$\omega = \lambda - \frac{1}{4}(\omega' - \omega) - \frac{1}{4}(\omega'' - \omega) + k \cdot 180^\circ,$$

und folglich, weil immer

$$0 \leq \omega < 360^\circ$$

gesetzt werden kann,

$$0 \leq \lambda - \frac{1}{4}(\omega' - \omega) - \frac{1}{4}(\omega'' - \omega) + k \cdot 180^\circ < 360^\circ,$$

woraus sich leicht

$$\frac{\frac{1}{4}(\omega' - \omega) + \frac{1}{4}(\omega'' - \omega) - \lambda}{180^\circ}$$

$$\leq k$$

$$< \frac{\frac{1}{4}(\omega' - \omega) + \frac{1}{4}(\omega'' - \omega) - \lambda}{180^\circ} + 2$$

ergiebt. Hieraus sieht man, dass die ganze Zahl k nur zwei Werthe von der Form n , $n + 1$ haben kann, die sich mittelst des Vorhergehenden immer bestimmen lassen. Also kann auch ω nur die beiden folgenden Werthe haben:

$$\omega = \begin{cases} \lambda - \frac{1}{4}(\omega' - \omega) - \frac{1}{4}(\omega'' - \omega) + n \cdot 180^\circ \\ \lambda - \frac{1}{4}(\omega' - \omega) - \frac{1}{4}(\omega'' - \omega) + (n + 1) \cdot 180^\circ. \end{cases}$$

Welchen dieser beiden Werthe man aber zu nehmen hat, kann, wie sogleich in die Augen fallen wird, immer auf ganz ähnliche Art wie vorher mit völliger Sicherheit entschieden werden.

Hat man auf die vorhergehende Weise die Azimuthe ω , ω' , ω'' gefunden, so ergeben sich die Höhe h und die Polhöhe φ mittelst der Formeln 29) oder 30), wobei man aber Folgendes zu merken hat. Der absolute Werth von $h - \varphi$ übersteigt nie 90° , der Werth von $h + \varphi$, welcher immer positiv ist, übersteigt nie 180° . Also kann $h + \varphi$ mittelst der zweiten der Gleichungen 29) oder 30) immer ohne alle Zweideutigkeit bestimmt werden. Dagegen lässt die erste der

*) M. s. mein Lehrbuch der Mathematik und Physik für staats- und landwirthschaftliche Lehranstalten und Kameralisten überhaupt. Thl. II. Abth. I. Leipzig. 1843. S. 389.

beiden in Rede stehenden Gleichungen das Vorzeichen von $h - \varphi$ unbestimmt, und man kann also, wenn d den absoluten Werth von $h - \varphi$, s den Werth von $h + \varphi$ bezeichnet,

$$h - \varphi = \pm d, \quad h + \varphi = s$$

setzen, woraus sich

$$31) \quad h = \frac{1}{2}(s \pm d), \quad \varphi = \frac{1}{2}(s \mp d)$$

ergiebt. Ob man in diesen Formeln die obern oder untern Zeichen zu nehmen hat, lässt sich nur aus den Beobachtungen selbst entscheiden, und in dieser Beziehung wird es daher jedenfalls vortheilhaft sein, wenn der Theodolit, was ja auch fast immer der Fall ist, einen jedoch nur eine untergeordnete Genauigkeit gewährenden Höhenkreis hat, weil man es dann immer in seiner Gewalt hat, die Höhe h durch unmittelbare Beobachtung wenigstens näherungsweise zu bestimmen, und dann also auch immer zu entscheiden im Stande sein wird, wie man die Zeichen in den Formeln 31) zu nehmen hat.

Da man jetzt h und φ kennt, so lassen sich nun auch die den drei Beobachtungen entsprechenden Stundenwinkel σ , σ' , σ'' der drei Sterne auf folgende Art bestimmen. Nach der dritten der Gleichungen 5) ist

$$32) \quad \begin{cases} \cos \sigma = \frac{\sin h - \sin \delta \sin \varphi}{\cos \delta \cos \varphi}, \\ \cos \sigma' = \frac{\sin h - \sin \delta' \sin \varphi}{\cos \delta' \cos \varphi}, \\ \cos \sigma'' = \frac{\sin h - \sin \delta'' \sin \varphi}{\cos \delta'' \cos \varphi}; \end{cases}$$

woraus man nach einer aus der sphärischen Trigonometrie hinreichend bekannten Transformation die Formeln

$$33) \quad \begin{cases} \cos \frac{1}{2} \sigma = \pm \sqrt{\frac{\cos \{45^\circ - \frac{1}{2}(h - \delta - \varphi)\} \cos \{45^\circ - \frac{1}{2}(h + \delta + \varphi)\}}{\cos \delta \cos \varphi}}, \\ \cos \frac{1}{2} \sigma' = \pm \sqrt{\frac{\cos \{45^\circ - \frac{1}{2}(h - \delta' - \varphi)\} \cos \{45^\circ - \frac{1}{2}(h + \delta' + \varphi)\}}{\cos \delta' \cos \varphi}}, \\ \cos \frac{1}{2} \sigma'' = \pm \sqrt{\frac{\cos \{45^\circ - \frac{1}{2}(h - \delta'' - \varphi)\} \cos \{45^\circ - \frac{1}{2}(h + \delta'' + \varphi)\}}{\cos \delta'' \cos \varphi}} \end{cases}$$

und

$$34) \quad \begin{cases} \sin \frac{1}{2} \sigma = \sqrt{\frac{\sin \{45^\circ - \frac{1}{2}(h - \delta + \varphi)\} \sin \{45^\circ - \frac{1}{2}(h + \delta - \varphi)\}}{\cos \delta \cos \varphi}}, \\ \sin \frac{1}{2} \sigma' = \sqrt{\frac{\sin \{45^\circ - \frac{1}{2}(h - \delta' + \varphi)\} \sin \{45^\circ - \frac{1}{2}(h + \delta' - \varphi)\}}{\cos \delta' \cos \varphi}}, \\ \sin \frac{1}{2} \sigma'' = \sqrt{\frac{\sin \{45^\circ - \frac{1}{2}(h - \delta'' + \varphi)\} \sin \{45^\circ - \frac{1}{2}(h + \delta'' - \varphi)\}}{\cos \delta'' \cos \varphi}}; \end{cases}$$

also auch

$$35) \begin{cases} \tan \frac{1}{2} \sigma = \pm \sqrt{\frac{\sin \{45^\circ - \frac{1}{2}(h - \delta + \varphi)\} \sin \{45^\circ - \frac{1}{2}(h + \delta - \varphi)\}}{\cos \{45^\circ - \frac{1}{2}(h - \delta - \varphi)\} \cos \{45^\circ - \frac{1}{2}(h + \delta + \varphi)\}}}, \\ \tan \frac{1}{2} \sigma' = \pm \sqrt{\frac{\sin \{45^\circ - \frac{1}{2}(h - \delta' + \varphi)\} \sin \{45^\circ - \frac{1}{2}(h + \delta' - \varphi)\}}{\cos \{45^\circ - \frac{1}{2}(h - \delta' - \varphi)\} \cos \{45^\circ - \frac{1}{2}(h + \delta' + \varphi)\}}}, \\ \tan \frac{1}{2} \sigma'' = \pm \sqrt{\frac{\sin \{45^\circ - \frac{1}{2}(h - \delta'' + \varphi)\} \sin \{45^\circ - \frac{1}{2}(h + \delta'' - \varphi)\}}{\cos \{45^\circ - \frac{1}{2}(h - \delta'' - \varphi)\} \cos \{45^\circ - \frac{1}{2}(h + \delta'' + \varphi)\}}} \end{cases}$$

erhält. Da die ganzen Stundenwinkel σ , σ' , σ'' nie grösser als 360° sind, so sind die halben Stundenwinkel $\frac{1}{2}\sigma$, $\frac{1}{2}\sigma'$, $\frac{1}{2}\sigma''$ nicht grösser als 180° ; ob aber die halben Stundenwinkel kleiner oder grösser als 90° sind, was die vorhergehenden Formeln offenbar ganz unentschieden lassen, hängt davon ab, ob die ganzen Stundenwinkel kleiner oder grösser als 180° sind, welches sich immer leicht entscheiden lässt, da man die Azimuthe ω , ω' , ω'' nach dem Obigen schon kennt, und die Stundenwinkel mit den entsprechenden Azimuthen offenbar immer gleichzeitig kleiner und grösser als 180° sind.

Bis hierher haben wir unserm Zwecke gemäss kein anderes Instrument als bloss den Azimuthaltheodoliten gebraucht, und wollen nun, bevor wir weiter gehen, die Formeln, nach denen das Azimuth ω , die Höhe h und die Polhöhe φ , welches letztere Element zu bestimmen vorzugsweise und zunächst unsere Absicht war, am leichtesten berechnet werden, im Folgenden nochmals zusammenstellen:

$$36) \begin{cases} M = \sin \frac{1}{2}(\delta - \delta') \cos \frac{1}{2}(\delta + \delta') \sin \frac{1}{2}(\omega'' - \omega), \\ N = \sin \frac{1}{2}(\delta - \delta'') \cos \frac{1}{2}(\delta + \delta'') \sin \frac{1}{2}(\omega' - \omega), \\ \tan \eta = \frac{N}{M}, \\ \tan \left\{ \omega + \frac{1}{4}(\omega' - \omega) + \frac{1}{4}(\omega'' - \omega) \right\} \\ \quad = \tan(45^\circ + \eta) \tan \frac{1}{4} \{ (\omega' - \omega) - (\omega'' - \omega) \}, \\ K = \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta - \delta') \cos \frac{1}{2}(\delta + \delta')}{\sin \frac{1}{2}(\omega - \omega') \sin \frac{1}{2}(\omega + \omega')}, \\ L = \frac{\sin \delta \cos \omega' - \sin \delta' \cos \omega}{\sin \frac{1}{2}(\omega - \omega') \sin \frac{1}{2}(\omega + \omega')}, \\ \cos(h - \varphi) = K + L, \\ \cos(h + \varphi) = K - L. \end{cases}$$

Will man noch einen Hülfswinkel ξ mittelst der Formel

$$37) \tan \xi = \frac{L}{K}$$

berechnen, so können die vorhergehenden Formeln, wie man leicht finden wird, auf folgende Art dargestellt werden:

$$\begin{aligned}
 M &= \sin \frac{1}{2} (\delta - \delta') \cos \frac{1}{2} (\delta + \delta') \sin \frac{1}{2} (\omega'' - \omega), \\
 N &= \sin \frac{1}{2} (\delta - \delta'') \cos \frac{1}{2} (\delta + \delta'') \sin \frac{1}{2} (\omega' - \omega), \\
 \text{tang } \eta &= \frac{N}{M}, \\
 \text{tang } \left\{ \omega + \frac{1}{4} (\omega' - \omega) + \frac{1}{4} (\omega'' - \omega) \right\} \\
 &= \text{tang } (45^\circ + \eta) \text{ tang } \frac{1}{4} \{ (\omega' - \omega) - (\omega'' - \omega) \}, \\
 K &= \frac{\sin \frac{1}{2} (\delta - \delta') \cos \frac{1}{2} (\delta + \delta')}{\sin \frac{1}{2} (\omega - \omega') \sin \frac{1}{2} (\omega + \omega')}, \\
 L &= \frac{\sin \delta \cos \omega' - \sin \delta' \cos \omega}{\sin \frac{1}{2} (\omega - \omega') \sin \frac{1}{2} (\omega + \omega')}, \\
 \text{tang } \xi &= \frac{L}{K}, \\
 \cos (h - q) &= \frac{K \sin (45^\circ + \xi) \cdot \sqrt{2}}{\cos \xi} = \frac{K \cos (45^\circ - \xi) \cdot \sqrt{2}}{\cos \xi}, \\
 \cos (h + q) &= \frac{K \sin (45^\circ - \xi) \cdot \sqrt{2}}{\cos \xi} = \frac{K \cos (45^\circ + \xi) \cdot \sqrt{2}}{\cos \xi}.
 \end{aligned}
 \tag{38}$$

§. 5.

Hat man nun aber in den Momenten der drei Beobachtungen nach der in §. 2. gegebenen Anleitung auch die Stände einer genauen Uhr, die übrigens als ganz unberichtigt angenommen wird, beobachtet, so lassen sich aus diesen Beobachtungen noch andere wichtige Resultate ziehen, wie jetzt gezeigt werden soll.

Zu dem Ende nehmen wir völliger Bestimmtheit wegen im Folgenden an, dass während der auf die drei Beobachtungen verwandten Zeit keiner der drei beobachteten Sterne durch die südliche Hälfte des Meridians gegangen sei. Ferner sollen die drei Beobachtungen, so wie ihnen die Stundenwinkel σ , σ' , σ'' , welche in Graden ausgedrückt angenommen werden, entsprechen, nach ihrer Zeitfolge aufsteigend geordnet sein, und in dieser Folge die erste, zweite, dritte Beobachtung genannt werden. Die bekannten in Stunden ausgedrückten Rectascensionen der drei beobachteten Sterne wollen wir durch t , t' , t'' ; die beobachteten, in Stunden der Uhr ausgedrückten Zwischenzeiten zwischen der ersten und zweiten, ersten und dritten, zweiten und dritten Beobachtung durch $T_{1,2}$, $T_{1,3}$, $T_{2,3}$; die Stände der Uhr bei der ersten, zweiten und dritten Beobachtung durch $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$, $\mathcal{T}''$ bezeichnen.

Zuerst kann man nun den vierundzwanzigstündigen oder täglichen Gang der Uhr gegen Sternzeit, oder die Correction der Uhr gegen Sternzeit in einem Sterntage finden, worunter man die Uhrzeit versteht, welche die Uhr in einem Sterntage mehr oder weniger als vierundzwanzig Stunden weiset, indem man diese Uhrzeit im ersten Falle als positiv, im zweiten dagegen als negativ betrachtet. Setzen wir nämlich, jenachdem

die Grösse $\frac{1}{15}(\sigma' - \sigma) + (t' - t)$ positiv und nicht grösser als 24, oder grösser als 24, oder negativ ist, respective

$$\tau_{1,2} = \begin{cases} \frac{1}{15}(\sigma' - \sigma) + (t' - t) \\ \frac{1}{15}(\sigma' - \sigma) + (t' - t) - 24 \\ \frac{1}{15}(\sigma' - \sigma) + (t' - t) + 24 \end{cases}$$

und eben so, jenachdem die Grösse $\frac{1}{15}(\sigma'' - \sigma) + (t'' - t)$ positiv und nicht grösser als 24, oder grösser als 24, oder negativ ist, respective

$$\tau_{1,3} = \begin{cases} \frac{1}{15}(\sigma'' - \sigma) + (t'' - t) \\ \frac{1}{15}(\sigma'' - \sigma) + (t'' - t) - 24 \\ \frac{1}{15}(\sigma'' - \sigma) + (t'' - t) + 24 \end{cases}$$

so wie auf ähnliche Art, jenachdem die Grösse $\frac{1}{15}(\sigma'' - \sigma') + (t'' - t')$ positiv und nicht grösser als 24, oder grösser als 24, oder negativ ist, respective

$$\tau_{2,3} = \begin{cases} \frac{1}{15}(\sigma'' - \sigma') + (t'' - t') \\ \frac{1}{15}(\sigma'' - \sigma') + (t'' - t') - 24 \\ \frac{1}{15}(\sigma'' - \sigma') + (t'' - t') + 24 \end{cases}$$

so sind, wie leicht erhellen wird, die Grössen $\tau_{1,2}$, $\tau_{1,3}$, $\tau_{2,3}$ respective die in Sternstunden ausgedrückten Zwischenzeiten zwischen der ersten und zweiten, ersten und dritten, zweiten und dritten Beobachtung; und die vierten Glieder der Proportionen

$$\begin{aligned} \tau_{1,2} : 24 &= T_{1,2} : \frac{24 \cdot T_{1,2}}{\tau_{1,2}} \\ \tau_{1,3} : 24 &= T_{1,3} : \frac{24 \cdot T_{1,3}}{\tau_{1,3}} \\ \tau_{2,3} : 24 &= T_{2,3} : \frac{24 \cdot T_{2,3}}{\tau_{2,3}} \end{aligned}$$

sind folglich die in Stunden ausgedrückten, auf 24 Sternstunden oder einen Sterntag gehenden Uhrzeiten. Bezeichnen wir also den täglichen Gang der Uhr gegen Sternzeit oder die Correction der Uhr gegen Sternzeit in einem Sterntage nach der oben gegebenen Erklärung durch G , so ist offenbar

$$\begin{aligned} G &= \frac{24 \cdot T_{1,2}}{\tau_{1,2}} - 24 = \frac{24(T_{1,2} - \tau_{1,2})}{\tau_{1,2}}, \\ G &= \frac{24 \cdot T_{1,3}}{\tau_{1,3}} - 24 = \frac{24(T_{1,3} - \tau_{1,3})}{\tau_{1,3}}, \\ G &= \frac{24 \cdot T_{2,3}}{\tau_{2,3}} - 24 = \frac{24(T_{2,3} - \tau_{2,3})}{\tau_{2,3}}. \end{aligned}$$

Wegen der Beobachtungsfehler werden diese drei Bestimmungen von G nie völlig genau mit einander übereinstimmen, weshalb man das arithmetische Mittel zwischen denselben nimmt, und daher

$$G = 8 \left(\frac{T_{1,2}}{\tau_{1,2}} + \frac{T_{1,3}}{\tau_{1,3}} + \frac{T_{2,3}}{\tau_{2,3}} - 3 \right)$$

setzt.

Ferner kann man auch die Correctionen der Stände der Uhr in den Momenten der drei Beobachtungen gegen Sternzeit finden. Setzen wir nämlich, jenachdem $\frac{1}{15}\sigma + t$ nicht grösser oder grösser als 24 ist, respective

$$\tau_1 = \begin{cases} \frac{1}{15}\sigma + t \\ \frac{1}{15}\sigma + t - 24 \end{cases}$$

und eben so, jenachdem $\frac{1}{15}\sigma' + t'$ nicht grösser oder grösser als 24 ist, respective

$$\tau'_1 = \begin{cases} \frac{1}{15}\sigma' + t' \\ \frac{1}{15}\sigma' + t' - 24 \end{cases}$$

so wie auf ähnliche Art, jenachdem $\frac{1}{15}\sigma'' + t''$ nicht grösser oder grösser als 24 ist, respective

$$\tau''_1 = \begin{cases} \frac{1}{15}\sigma'' + t'' \\ \frac{1}{15}\sigma'' + t'' - 24 \end{cases}$$

so sind, wie leicht erhellen wird, die Grössen $\tau_1, \tau'_1, \tau''_1$ die den Momenten der drei Beobachtungen entsprechenden Sternzeiten, und die Correctionen der Stände der Uhr in den Momenten der drei Beobachtungen gegen Sternzeit sind folglich, weil

$$\begin{aligned} \tau + (\tau_1 - \tau) &= \tau_1, \\ \tau' + (\tau'_1 - \tau') &= \tau'_1, \\ \tau'' + (\tau''_1 - \tau'') &= \tau''_1 \end{aligned}$$

ist, offenbar respective

$$\tau_1 - \tau, \tau'_1 - \tau', \tau''_1 - \tau'';$$

oder, wenn wir diese Correctionen nach der Reihe durch C, C', C'' bezeichnen, so ist

$$\begin{aligned} C &= \tau_1 - \tau, \\ C' &= \tau'_1 - \tau', \\ C'' &= \tau''_1 - \tau''. \end{aligned}$$

Man denke sich jetzt beliebige Zeit nach den angestellten Beobachtungen ein, einem bestimmten Stande der Uhr, den wir überhaupt durch U bezeichnen wollen, entsprechendes Zeitmoment, so kann man, da die Stände der Uhr τ, τ', τ'' in den Momenten der drei Beobachtungen bekannt sind, offenbar immer leicht die seit diesen Zeitmomenten bis zu dem Zeitmomente, welcher dem Uhrstande U entspricht, verflossenen Uhrzeiten Z, Z', Z'' berechnen, und erhält, wenn man diese Uhrzeiten mit Hülfe des aus dem Vorhergehenden bekannten täglichen Ganges G der Uhr in Sternzeiten verwandelt, für diese Sternzeiten respective die Ausdrücke

$$\frac{24Z}{24+G}, \quad \frac{24Z'}{24+G}, \quad \frac{24Z''}{24+G}.$$

Weil nun nach dem Obigen die den Momenten der drei Beobachtungen entsprechenden Sternzeiten

$$\tau + C, \quad \tau' + C', \quad \tau'' + C''$$

sind, so sind offenbar die Reste, welche man erhält, wenn man die Grössen

$$\frac{24Z}{24+G} - \{24 - (\tau + C)\},$$

$$\frac{24Z'}{24+G} - \{24 - (\tau' + C')\},$$

$$\frac{24Z''}{24+G} - \{24 - (\tau'' + C'')\};$$

d. i. die Grössen

$$\frac{24Z}{24+G} + \tau + C - 24,$$

$$\frac{24Z'}{24+G} + \tau' + C' - 24,$$

$$\frac{24Z''}{24+G} + \tau'' + C'' - 24;$$

durch 24 dividirt, sämmtlich Ausdrücke für die dem Zeitmomente, wo die Uhrzeit U ist, entsprechende Sternzeit, und man wird also den wahrscheinlichsten Werth dieser Sternzeit erhalten, wenn man das arithmetische Mittel zwischen den drei in Rede stehenden Ausdrücken nimmt. Auf diese Weise kann man also an jedem Tage die einem beliebigen Uhrstande entsprechende Sternzeit mit Sicherheit berechnen. Natürlich entspricht diese Sternzeit dem Orte, an welchem die Beobachtungen angestellt worden sind.

Hat man an einem zweiten Orte ganz ähnliche Beobachtungen wie vorher angestellt, und für diesen Ort die den Momenten der drei Beobachtungen entsprechenden Sternzeiten nach der im Obigen gegebenen Anleitung bestimmt, so kann man nun, wie vorher gezeigt worden ist, aus den am ersten Orte angestellten Beobachtungen auch in Bezug auf diesen Ort die denselben Momenten entsprechenden Sternzeiten berechnen. Bezeichnen wir nun die den Momenten der drei an dem zweiten Orte angestellten Beobachtungen entsprechenden in Stunden ausgedrückten Sternzeiten in Bezug auf den ersten Beobachtungsort durch S, S', S'' ; in Bezug auf den zweiten Beobachtungsort durch S_1, S'_1, S''_1 ; und die in Stunden ausgedrückte geographische Länge des zweiten Beobachtungsorts in Bezug auf den ersten Beobachtungsort

als Anfang der Längen, wobei die Längen in der Richtung von Westen nach Osten, d. h. nach derselben Richtung, nach welcher sich die Erde um ihre Axe bewegt, gezählt werden, durch L_1 ; so ist offenbar, jenachdem $S_1 - S$ eine positive oder eine negative Grösse ist,

$$L_1 = \begin{cases} S_1 - S \\ S_1 - S + 24 \end{cases}$$

und eben so, jenachdem $S'_1 - S'$ eine positive oder eine negative ist,

$$L_1 = \begin{cases} S'_1 - S' \\ S'_1 - S' + 24 \end{cases}$$

endlich auch, jenachdem $S''_1 - S''$ eine positive oder eine negative Grösse ist,

$$L_1 = \begin{cases} S''_1 - S'' \\ S''_1 - S'' + 24 \end{cases}$$

Das arithmetische Mittel aus den drei auf diese Weise erhaltenen Werthen von L_1 wird man wieder als den definitiven Werth dieser Grösse annehmen, und $15L_1$ ist dann die in Graden ausgedrückte Länge des zweiten Orts in Bezug auf den ersten Ort als Anfang der Längen. Auf diese Weise kann man also auch, wenn man sich nur auf den Gang der Uhr zwischen den einzelnen Beobachtungen verlassen kann, die Längendifferenzen zwischen den verschiedenen Beobachtungs-orten bestimmen, zu welchem Zwecke aber natürlich mit dem Theodoliten eine genaue tragbare Uhr, oder ein sogenannter Chronometer verbunden werden muss.

Da sich übrigens, wie aus dem vorhergehenden Paragraphen erhellet, bei einer geodätischen Messung mittelst unserer Methode auch auf jedem Stationspunkte die Azimuthe aller übrigen aus demselben sichtbaren Stationspunkte bestimmen lassen, so können aus diesen Azimuthen und den bekannten Entfernungen der letztern Stationspunkte von dem erstern natürlich auch die Längendifferenzen, so wie auch die Breitendifferenzen, in Bezug auf den in Rede stehenden Stationspunkt berechnet werden, was hier nicht weiter erläutert zu werden braucht.

§. 6.

Hat der Theodolit einen genauen Höhenkreis, so kann man mit demselben auch die Höhe messen, in welcher die drei Sterne beobachtet worden sind. Bezeichnet man diese gemessene Höhe durch h_1 ; den, jenachdem die gemessenen Höhen gegen die wahren zu gross oder zu klein sind, als positiv oder als negativ betrachteten Collimationsfehler des

Höhenkreises durch c ; die der Höhe $h_1 - c$ entsprechende Refraction durch ϱ ; so ist offenbar

$$h = h_1 - \varrho - c,$$

wo h die ihm im Obigen beigelegte Bedeutung auch jetzt behält, und folglich

$$\varrho + c = h_1 - h,$$

mittels welcher Formel also $\varrho + c$ jederzeit gefunden werden kann. Nimmt man den Collimationsfehler aus anderweitigen Bestimmungen desselben, worüber man meine Geodäsie §. 71. nachsehen kann, als bekannt an, so lässt sich die der Höhe $h_1 - c$ entsprechende Refraction ϱ für den zur Zeit der Beobachtung Statt findenden Stand des Barometers und Thermometers mittelst der aus dem Obigen sich ergebenden Formel

$$\varrho = h_1 - h - c$$

berechnen. Wäre man dagegen ϱ als bekannt anzunehmen berechtigt, so würde sich der Collimationsfehler mittelst der Formel

$$c = h_1 - h - \varrho$$

finden lassen. Unter der Voraussetzung, dass der absolute Werth von c sehr klein ist, eine Voraussetzung, welche man immer zu machen berechtigt sein wird, kann ohne merklichen Fehler für ϱ die der Höhe h_1 entsprechende Refraction gesetzt, und aus den bekannten Refractionstafeln, am besten aus der Tafel von Bessel (*Tabulae Regiomontanae reductionum observationum astronomicarum ab anno 1750 usque ad annum 1850 computatae. Regiomonti. 1830. p. 538.*) mit gehöriger Rücksicht auf den zur Zeit der Beobachtung Statt findenden Stand des Barometers und Thermometers berechnet werden.

§. 7.

Wir wollen nun, was man bei keiner zu irgend einem praktischen Zwecke in Vorschlag gebrachten Methode unterlassen sollte, eine vollständige Untersuchung über die Fehler anstellen, denen die obige Methode unterworfen ist, und wollen in dieser Beziehung zuerst die aus der fehlerhaften Aufstellung des Theodoliten entspringenden Fehler in Betrachtung ziehen.

Den Mittelpunkt des Limbus des Theodoliten bezeichnen wir im Folgenden der Kürze wegen durch O , und nehmen denselben als den Anfang zweier rechtwinkligen Coordinatensysteme der xyz und $x_1y_1z_1$ an, über die man sich die folgenden näheren Bestimmungen zu merken hat.

Die Ebene der xy sei die durch O gelegte horizontale

Ebene. Der positive Theil der Axe der x sei von O nach Süden, der positive Theil der Axe der y sei von O nach Westen, der positive Theil der Axe der z sei von O nach dem Zenith gerichtet.

Die Ebene der $x_1 y_1$ sei die Ebene des Aequators, welche wir uns natürlich ebenfalls durch O gelegt zu denken haben. Der positive Theil der Axe der x_1 sei die Durchschnittslinie der Ebene des Aequators mit der südlichen Hälfte des Meridians. Der positive Theil der Axe der y_1 sei von O nach Westen, und der positive Theil der Axe der z_1 sei von O nach dem nördlichen Weltpole gerichtet.

Zwischen den Coordinaten dieser beiden Systeme hat man, wenn φ wie früher die Polhöhe bezeichnet, nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten, wie übrigens auch schon aus §. 3. bekannt ist, die folgenden allgemein gültigen Gleichungen:

$$39) \begin{cases} x = x_1 \sin \varphi - z_1 \cos \varphi, \\ y = y_1, \\ z = x_1 \cos \varphi + z_1 \sin \varphi; \end{cases}$$

also, wie hieraus leicht folgt:

$$40) \begin{cases} x_1 = x \sin \varphi + z \cos \varphi, \\ y_1 = y, \\ z_1 = -x \cos \varphi + z \sin \varphi. \end{cases}$$

Sind jetzt

$$41) \quad x_1 = a z_1, \quad y_1 = b z_1$$

die Gleichungen einer durch den Punkt O und einen Stern S , dessen Stundenwinkel und Declination σ und δ sind, gezogenen geraden Linie im Systeme der $x_1 y_1 z_1$, so ist, wenn ξ_1 , η_1 , ζ_1 die Coordinaten irgend eines Punktes in dem Theile OS dieser Linie oder dessen Verlängerung über den Stern S hinaus in demselben Systeme bezeichnen, und ρ die Entfernung dieses Punktes von dem Punkte O ist, offenbar in völliger Allgemeinheit

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \rho \cos \sigma \cos \delta, \\ \eta_1 &= \rho \sin \sigma \cos \delta, \\ \zeta_1 &= \rho \sin \delta; \end{aligned}$$

und folglich, weil nach 41)

$$\xi_1 = a \zeta_1, \quad \eta_1 = b \zeta_1$$

ist:

$$\begin{aligned} \rho \cos \sigma \cos \delta &= a \rho \sin \delta, \\ \rho \sin \sigma \cos \delta &= b \rho \sin \delta; \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} a &= \cos \sigma \cot \delta, \\ b &= \sin \sigma \cot \delta. \end{aligned}$$

Daher sind nach dem Obigen

$$42) \begin{cases} x_1 = z_1 \cos \sigma \cot \delta, \\ y_1 = z_1 \sin \sigma \cot \delta \end{cases}$$

die Gleichungen der durch den Punkt O und den Stern S gezogenen geraden Linie im Systeme der $x_1 y_1 z_1$.

Um nun die Gleichungen dieser geraden Linie im Systeme der xyz zu finden, muss man in die Gleichungen 42) für x_1 , y_1 , z_1 die Ausdrücke 40) einführen, wodurch man die Gleichungen

$$43) \begin{cases} x \sin \varphi + z \cos \varphi = - (x \cos \varphi - z \sin \varphi) \cos \sigma \cot \delta, \\ y = - (x \cos \varphi - z \sin \varphi) \sin \sigma \cot \delta \end{cases}$$

erhält. Aus der ersten dieser beiden Gleichungen erhält man ohne Schwierigkeit

$$x = - \frac{\sin \delta \cos \varphi - \cos \sigma \cos \delta \sin \varphi}{\sin \delta \sin \varphi + \cos \sigma \cos \delta \cos \varphi} z,$$

und folglich, wie man hieraus leicht findet,

$$x \cos \varphi - z \sin \varphi = - \frac{\sin \delta}{\sin \delta \sin \varphi + \cos \sigma \cos \delta \cos \varphi} z,$$

also

$$y = \frac{\sin \sigma \cos \delta}{\sin \delta \sin \varphi + \cos \sigma \cos \delta \cos \varphi} z.$$

Daher sind die Gleichungen der durch den Punkt O und den Stern S gezogenen geraden Linie im Systeme der xyz :

$$44) \begin{cases} x = - \frac{\sin \delta \cos \varphi - \cos \sigma \cos \delta \sin \varphi}{\sin \delta \sin \varphi + \cos \sigma \cos \delta \cos \varphi} z, \\ y = \frac{\sin \sigma \cos \delta}{\sin \delta \sin \varphi + \cos \sigma \cos \delta \cos \varphi} z. \end{cases}$$

Den Punkt O nehmen wir ferner als den Anfang eines neuen rechtwinkligen Coordinatensystems der $x_2 y_2 z_2$ an. Die Ebene der $x_2 y_2$ sei die Ebene des Horizonts. Der positive Theil der Axe der x_2 sei der eine der beiden Theile, in welche die Durchschnittslinie der Ebene des Limbus des Theodoliten mit der Ebene des Horizonts von dem Punkte O getheilt wird. Der positive Theil der Axe der y_2 werde so angenommen, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der x_2 durch den rechten Winkel $(x_2 y_2)$ hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y_2 zu gelangen, nach derselben Richtung hin bewegen muss, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen. Der positive Theil der Axe der z_2 sei von O nach dem Zenith gerichtet. Bezeichnen wir nun den von dem positiven Theile der Axe der

x_2 mit dem positiven Theile der Axe der x eingeschlossenen, von dem positiven Theile der Axe der x an durch den rechten Winkel (xy) hindurch von 0 bis 360° gezählten Winkel durch Θ ; so haben wir nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten*) die folgenden allgemein gültigen Gleichungen:

$$45) \begin{cases} x = x_2 \cos \Theta - y_2 \sin \Theta, \\ y = x_2 \sin \Theta + y_2 \cos \Theta, \\ z = z_2; \end{cases}$$

also, wie hieraus leicht folgt:

$$46) \begin{cases} x_2 = x \cos \Theta + y \sin \Theta, \\ y_2 = -x \sin \Theta + y \cos \Theta, \\ z_2 = z. \end{cases}$$

Der Punkt O sei nun auch der Anfang eines vierten rechtwinkligen Coordinatensystems der $x_3 y_3 z_3$, welches wir den folgenden Bestimmungen unterwerfen wollen. Die Ebene der $x_3 y_3$ sei die Ebene des Limbus des Theodoliten. Der positive Theil der Axe der x_3 falle mit dem positiven Theile der Axe der x_2 zusammen. Den positiven Theil der Axe der y_3 nehme man so an, dass er über dem Horizonte liegt, und der positive Theil der Axe der z_3 werde so angenommen, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der y_3 durch den rechten Winkel $(y_3 z_3)$ hindurch zu dem positiven Theile der Axe der z_3 zu gelangen, nach derselben Richtung bewegen muss, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der y_2 durch den rechten Winkel $(y_2 z_2)$ hindurch zu dem positiven Theile der Axe der z_2 zu gelangen. Bezeichnet dann i den von den positiven Theilen der Axen der y_2 und y_3 eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel; so ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten**))

$$47) \begin{cases} x_2 = x_3, \\ y_2 = y_3 \cos i - z_3 \sin i, \\ z_2 = y_3 \sin i + z_3 \cos i; \end{cases}$$

also, wie man hieraus leicht findet:

$$48) \begin{cases} x_3 = x_2, \\ y_3 = y_2 \cos i + z_2 \sin i, \\ z_3 = -y_2 \sin i + z_2 \cos i. \end{cases}$$

Man kann auch den positiven Theil der Axe der y_3 so annehmen, dass er mit dem positiven Theile der Axe der y_2

*) M. s. meine Elemente der analytischen Geometrie. Thl. I. S. 31.

**) A. a. O.

immer einen 90° nicht übersteigenden Winkel einschliesst, und den positiven Theil der Axe der z_3 immer über dem Horizonte. Bezeichnet dann i den von den positiven Theilen der Axen der y_2 und y_3 eingeschlossenen, 90° nicht übersteigenden, und, jenachdem der positive Theil der Axe der y_3 über oder unter dem Horizonte liegt, positiv oder negativ genommenen Winkel, so bleiben die Gleichungen 47) und 48) zwischen den Coordinaten der Systeme der $x_2 y_2 z_2$ und $x_3 y_3 z_3$ ganz ungeändert, wovon man sich leicht mittelst der allgemeinen Formeln der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten überzeugen wird.

Endlich werde nun der Punkt O noch als der Anfang eines fünften rechtwinkligen Coordinatensystems der $x_4 y_4 z_4$ angenommen. Die Ebene der $x_4 y_4$ sei auch jetzt die Ebene des Limbus des Theodoliten, oder vielmehr die mit derselben zusammenfallende Ebene, welche die Nonien trägt. Der positive Theil der Axe der x_4 sei von dem Punkte O nach dem Nullpunkte eines bestimmten Nonius hin gerichtet. Der positive Theil der Axe der y_4 werde so angenommen, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der x_4 durch den rechten Winkel ($x_4 y_4$) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y_4 zu gelangen, nach derselben Richtung hin bewegen muss, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x_3 durch den rechten Winkel ($x_3 y_3$) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y_3 zu gelangen. Der positive Theil der Axe der z_4 falle mit dem positiven Theile der Axe der z_3 zusammen. Bezeichnet dann w den von dem positiven Theile der Axe der x_4 mit dem positiven Theile der Axe der x_3 eingeschlossenen Winkel, indem man diesen Winkel von dem positiven Theile der Axe der x_3 an durch den rechten Winkel ($x_3 y_3$) hindurch von 0 bis 360° zählt; so ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten*)

$$49) \begin{cases} x_3 = x_4 \cos w - y_4 \sin w, \\ y_3 = x_4 \sin w + y_4 \cos w, \\ z_3 = z_4; \end{cases}$$

woraus man leicht

$$50) \begin{cases} x_4 = x_3 \cos w + y_3 \sin w, \\ y_4 = -x_3 \sin w + y_3 \cos w, \\ z_4 = z_3 \end{cases}$$

erhält.

Aus 50) und 48) ergibt sich

$$\begin{aligned} x_4 &= x_2 \cos w + y_2 \cos i \sin w + z_2 \sin i \sin w, \\ y_4 &= -x_2 \sin w + y_2 \cos i \cos w + z_2 \sin i \cos w, \\ z_4 &= -y_2 \sin i + z_2 \cos i; \end{aligned}$$

*) A. a. O.

folglich nach 46)

$$51) \begin{cases} x_4 = (\cos \Theta \cos w - \sin \Theta \sin w \cos i) x \\ \quad + (\sin \Theta \cos w + \cos \Theta \sin w \cos i) y \\ \quad + \sin w \sin i \cdot z, \\ y_4 = -(\cos \Theta \sin w + \sin \Theta \cos w \cos i) x \\ \quad - (\sin \Theta \sin w - \cos \Theta \cos w \cos i) y \\ \quad + \cos w \sin i \cdot z, \\ z_4 = \sin \Theta \sin i \cdot x - \cos \Theta \sin i \cdot y + \cos i \cdot z. \end{cases}$$

Sind nun

$$51^*) \quad x_4 = Az_4 + \mathcal{X}, \quad y_4 = Bz_4 + \mathfrak{B}$$

die Gleichungen der nach dem Sterne S gerichteten Visirlinie des Fernrohrs im Systeme der $x_4 y_4 z_4$; so sind nach 51) die Gleichungen dieser Linie im Systeme der xyz :

$$\begin{aligned} & (\cos \Theta \cos w - \sin \Theta \sin w \cos i) x \\ & + (\sin \Theta \cos w + \cos \Theta \sin w \cos i) y \\ & + \sin w \sin i \cdot z \\ & = A (\sin \Theta \sin i \cdot x - \cos \Theta \sin i \cdot y + \cos i \cdot z) + \mathcal{X}, \\ & - (\cos \Theta \sin w + \sin \Theta \cos w \cos i) x \\ & - (\sin \Theta \sin w - \cos \Theta \cos w \cos i) y \\ & + \cos w \sin i \cdot z \\ & = B (\sin \Theta \sin i \cdot x - \cos \Theta \sin i \cdot y + \cos i \cdot z) + \mathfrak{B}; \end{aligned}$$

welche Gleichungen man aber leicht auf die folgende Form bringt:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} & (\cos \Theta \cos w - \sin \Theta \sin w \cos i - A \sin \Theta \sin i) x \\ & + (\sin \Theta \cos w + \cos \Theta \sin w \cos i + A \cos \Theta \sin i) y \\ & + (\sin w \sin i - A \cos i) z \end{aligned} \right\} = \mathcal{X}, \\ & \left. \begin{aligned} & - (\cos \Theta \sin w + \sin \Theta \cos w \cos i + B \sin \Theta \sin i) x \\ & - (\sin \Theta \sin w - \cos \Theta \cos w \cos i - B \cos \Theta \sin i) y \\ & + (\cos w \sin i - B \cos i) z \end{aligned} \right\} = \mathfrak{B}. \end{aligned}$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen zuerst y , dann x ; so erhält man nach etwas weitläufiger, aber sonst keine Schwierigkeiten darbietender Rechnung, mit Hülfe einiger bekannten goniometrischen Relationen, wenn der Kürze wegen

$$52) \begin{cases} M = \mathcal{X} (\sin \Theta \sin w - \cos \Theta \cos w \cos i - B \cos \Theta \sin i) \\ \quad + \mathfrak{B} (\sin \Theta \cos w + \cos \Theta \sin w \cos i + A \cos \Theta \sin i), \\ N = \mathcal{X} (\cos \Theta \sin w + \sin \Theta \cos w \cos i + B \sin \Theta \sin i) \\ \quad + \mathfrak{B} (\cos \Theta \cos w - \sin \Theta \sin w \cos i - A \cos \Theta \sin i) \end{cases}$$

und

$$53) \begin{cases} F = \frac{\sin i - (A \sin w + B \cos w) \cos i}{\cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i}, \\ G = \frac{A \cos w - B \sin w}{\cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i}, \\ K = \frac{M}{\cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i}, \\ L = \frac{N}{\cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i} \end{cases}$$

gesetzt wird, die folgenden Gleichungen der nach dem Sterne S gerichteten Visirlinie des Fernrohrs im Systeme der xyz :

$$54) \begin{cases} x = (F \sin \Theta + G \cos \Theta) z - K, \\ y = -(F \cos \Theta - G \sin \Theta) z + L; \end{cases}$$

und weil nun diese Linie der durch den Punkt O und den Stern S gezogenen Linie parallel ist; so haben wir nach 44) und 54), wie die analytische Geometrie lehrt*), die beiden folgenden Gleichungen:

$$55) \begin{cases} F \sin \Theta + G \cos \Theta = - \frac{\sin \delta \cos \varphi - \cos \sigma \cos \delta \sin \varphi}{\sin \delta \sin \varphi + \cos \sigma \cos \delta \cos \varphi}, \\ F \cos \Theta - G \sin \Theta = - \frac{\sin \sigma \cos \delta}{\sin \delta \sin \varphi + \cos \sigma \cos \delta \cos \varphi}. \end{cases}$$

Aus der ersten dieser beiden Gleichungen erhält man ohne alle Schwierigkeit

$$56) \cos \sigma = \tan \delta \frac{\cos \varphi + (F \sin \Theta + G \cos \Theta) \sin \varphi}{\sin \varphi - (F \sin \Theta + G \cos \Theta) \cos \varphi},$$

und folglich

$$\begin{aligned} & \frac{\sin \delta \sin \varphi + \cos \sigma \cos \delta \cos \varphi}{\sin \delta} \\ &= \frac{\sin \delta}{\sin \varphi - (F \sin \Theta + G \cos \Theta) \cos \varphi}. \end{aligned}$$

Weil nun nach der zweiten der Gleichungen 55)

$$\sin \sigma = - \frac{(F \cos \Theta - G \sin \Theta) (\sin \delta \sin \varphi + \cos \sigma \cos \delta \cos \varphi)}{\cos \delta}$$

ist, so ist

$$57) \sin \sigma = - \tan \delta \frac{F \cos \Theta - G \sin \Theta}{\sin \varphi - (F \sin \Theta + G \cos \Theta) \cos \varphi}.$$

Auch ist nach 56) und 57)

$$58) \tan \sigma = - \frac{F \cos \Theta - G \sin \Theta}{\cos \varphi + (F \sin \Theta + G \cos \Theta) \sin \varphi}.$$

Aus den Gleichungen 56) und 57) erhält man die folgende, den Stundenwinkel σ nicht mehr enthaltende Gleichung:

*) A. a. O. S. 182.

$$59) \{ \sin \varphi - (F \sin \Theta + G \cos \Theta) \cos \varphi \}^2 \\ = \tan \delta^2 \left\{ (F \cos \Theta - G \sin \Theta)^2 + [\cos \varphi + (F \sin \Theta + G \cos \Theta) \sin \varphi]^2 \right\}.$$

Setzt man aber

$$\tan \delta^2 = \frac{\sin \delta^2}{1 - \sin \delta^2},$$

so ergibt sich aus der vorhergehenden Gleichung ohne Schwierigkeit die Gleichung

$$\{ \sin \varphi - (F \sin \Theta + G \cos \Theta) \cos \varphi \}^2 \\ = \sin \delta^2 \left\{ (F \cos \Theta - G \sin \Theta)^2 + [\sin \varphi - (F \sin \Theta + G \cos \Theta) \cos \varphi]^2 + [\cos \varphi + (F \sin \Theta + G \cos \Theta) \sin \varphi]^2 \right\},$$

welche durch gehörige Entwicklung der eingeklammerten Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens leicht auf die Form

$$60) \sin \delta^2 = \frac{\{ \sin \varphi - (F \sin \Theta + G \cos \Theta) \cos \varphi \}^2}{1 + F^2 + G^2}$$

gebracht wird.

Nun ist aber nach 53), wie man durch leichte Rechnung findet,

$$1 + F^2 + G^2 = \frac{1 + A^2 + B^2}{\{ \cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i \}^2};$$

und, wenn der Kürze wegen

$$61) \Omega = \cos i \sin \varphi - \sin i \sin \Theta \cos \varphi \\ + \{ \sin w \sin i \sin \varphi - (\cos w \cos \Theta - \sin w \sin \Theta \cos i) \cos \varphi \} A \\ + \{ \cos w \sin i \sin \varphi + (\sin w \cos \Theta + \cos w \sin \Theta \cos i) \cos \varphi \} B$$

gesetzt wird,

$$\frac{\sin \varphi - (F \sin \Theta + G \cos \Theta) \cos \varphi}{1 + F^2 + G^2} = \frac{\Omega}{\cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i}.$$

Also hat man nach 60) die Gleichung

$$62) \sin \delta^2 = \frac{\Omega^2}{1 + A^2 + B^2},$$

oder die Gleichung

$$63) (1 + A^2 + B^2) \sin \delta^2 = \Omega^2.$$

Bezeichnet J den Neigungswinkel der Visirlinie des Fernrohrs gegen die Ebene des Limbus des Theodoliten oder, was dasselbe ist, gegen die Ebene, welche die Nonien

trägt, so ist nach den Principien der analytischen Geometrie*)

$$64) \sin J = \frac{1}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}},$$

und die Gleichung 63) kann daher auch unter der Form

$$65) \left(\frac{\sin \delta}{\sin J} \right)^2 = \Omega^2$$

dargestellt werden.

Wenn wir das Azimuth und die Höhe des Sterns S respective durch ω und h , und die Coordinaten eines beliebigen Punktes in dem Theile OS der durch O und den Stern S gezogenen geraden Linie oder dessen Verlängerung über S hinaus in dem Systeme der xyz durch ξ , η , ζ , die Entfernung dieses Punktes von dem Punkte O aber durch ρ bezeichnen; so ist offenbar in völliger Allgemeinheit

$$66) \begin{cases} \xi = \rho \cos \omega \cos h, \\ \eta = \rho \sin \omega \cos h, \\ \zeta = \rho \sin h; \end{cases}$$

und folglich sind, wie sich hieraus leicht ergibt,

$$67) \begin{cases} x = z \cos \omega \cot h, \\ y = z \sin \omega \cot h \end{cases}$$

die Gleichungen der durch den Punkt O und den Stern S gezogenen geraden Linie im Systeme der xyz . Weil nun diese gerade Linie der nach dem Sterne S gerichteten Visirlinie des Fernrohrs parallel ist, so erhalten wir, indem wir die vorstehenden Gleichungen mit den Gleichungen 54) vergleichen, nach den Principien der analytischen Geometrie**) die folgenden Gleichungen:

$$68) \begin{cases} F \sin \Theta + G \cos \Theta = \cos \omega \cot h, \\ F \cos \Theta - G \sin \Theta = -\sin \omega \cot h; \end{cases}$$

aus denen sich auch leicht

$$69) \begin{cases} F = \sin(\Theta - \omega) \cot h, \\ G = \cos(\Theta - \omega) \cot h; \end{cases}$$

und hieraus

$$70) F^2 + G^2 = \cot^2 h$$

ergibt.

Führt man in die Gleichungen 68) für F und G ihre aus 53) bekannten Ausdrücke ein, so erhält man die folgenden Gleichungen:

*) A. a. O. S. 220.

**) A. a. O. S. 182.

$$71) \left\{ \begin{array}{l} (\cos w \cos \Theta - \sin w \sin \Theta \cos i) A \\ - (\sin w \cos \Theta + \cos w \sin \Theta \cos i) B \\ = \{ \cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i \} \cos w \cot h \\ - \sin \Theta \sin i, \\ (\cos w \sin \Theta + \sin w \cos \Theta \cos i) A \\ - (\sin w \sin \Theta - \cos w \cos \Theta \cos i) B \\ = \{ \cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i \} \sin w \cot h \\ + \cos \Theta \sin i. \end{array} \right.$$

Also ist nach 61)

$$72) \Omega = (\sin \varphi - \cos w \cot h \cos \varphi) \{ \cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i \}$$

oder

$$73) \Omega = \frac{(\sin h \sin \varphi - \cos w \cos h \cos \varphi) \{ \cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i \}}{\sin h}.$$

Weil nun aber nach 6)

$$\sin \delta = \sin h \sin \varphi - \cos w \cos h \cos \varphi$$

ist, so ist

$$74) \Omega = \frac{\sin \delta}{\sin h} \{ \cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i \}.$$

Nach 65) ist

$$\frac{\sin \delta}{\sin J} = \pm \Omega,$$

und folglich nach 74)

$$\frac{\sin \delta}{\sin J} = \pm \frac{\sin \delta}{\sin h} \{ \cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i \}.$$

Für $i = 0$ ist also

$$\frac{\sin h}{\sin J} = \pm 1.$$

Offenbar ist aber in diesem Falle

$$\frac{\sin h}{\sin J} = + 1,$$

und daher, weil bei den Beobachtungen, wenn wir jetzt annehmen, dass man das Coordinatensystem der $x_3 y_3 z_3$ auf die zweite der beiden oben angegebenen Arten genommen hat, i wenigstens der Null immer sehr nahe kommen wird, nach dem Obigen

$$75) \frac{\sin \delta}{\sin J} = \Omega$$

und

$$76) \frac{\sin h}{\sin J} = \cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i$$

oder

$$77) \sin h = \sin J \{ \cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i \}.$$

Nach 69) ist

$$78) \quad \text{tang}(\Theta - \omega) = \frac{F}{G}.$$

Setzen wir nun

$$79) \quad \begin{cases} F' = \frac{\sin i - (A \sin w' + B \cos w') \cos i}{\cos i + (A \sin w' + B \cos w') \sin i} \\ G' = \frac{A \cos w' - B \sin w'}{\cos i + (A \sin w' + B \cos w') \sin i} \end{cases}$$

und bezeichnen das entsprechende Azimuth durch ω , so ist

$$80) \quad \text{tang}(\Theta - \omega') = \frac{F'}{G'}.$$

Weil nun

$$\text{tang}(\omega - \omega') = \text{tang}\{(\Theta - \omega') - (\Theta - \omega)\},$$

also

$$\text{tang}(\omega - \omega') = \frac{\text{tang}(\Theta - \omega') - \text{tang}(\Theta - \omega)}{1 + \text{tang}(\Theta - \omega') \text{tang}(\Theta - \omega)}$$

ist, so ist nach dem Vorhergehenden

$$81) \quad \text{tang}(\omega - \omega') = -\frac{FG' - GF'}{FF' + GG'}.$$

Nach dem Obigen ist, wenn man der Kürze wegen

$$R = \{\cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i\} \\ \times \{\cos i + (A \sin w' + B \cos w') \sin i\}$$

setzt,

$$\begin{aligned} & R(FG' - GF') \\ &= \{\sin i - (A \sin w + B \cos w) \cos i\} (A \cos w' - B \sin w') \\ &\quad - \{\sin i - (A \sin w' + B \cos w') \cos i\} (A \cos w - B \sin w) \\ &= -\sin i \{A(\cos w - \cos w') - B(\sin w - \sin w')\} \\ &\quad - \cos i \left\{ \frac{(A \sin w + B \cos w)(A \cos w' - B \sin w')}{-(A \sin w' + B \cos w')(A \cos w - B \sin w)} \right\} \\ &= 2 \sin i \sin \frac{1}{2}(w - w') \{A \sin \frac{1}{2}(w + w') + B \cos \frac{1}{2}(w + w')\} \\ &\quad - \cos i \sin(w - w') \cdot (A^2 + B^2), \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & R(FF' + GG') \\ &= \{\sin i - (A \sin w + B \cos w) \cos i\} \{\sin i - (A \sin w' + B \cos w') \cos i\} \\ &\quad + (A \cos w - B \sin w)(A \cos w' - B \sin w') \\ &= \sin i^2 \\ &\quad - \sin i \cos i \{A(\sin w + \sin w') + B(\cos w + \cos w')\} \\ &\quad + \cos i^2 (A \sin w + B \cos w)(A \sin w' + B \cos w') \\ &\quad + (A \cos w - B \sin w)(A \cos w' - B \sin w') \\ &= (A \sin w + B \cos w)(A \sin w' + B \cos w') \\ &\quad + (A \cos w - B \sin w)(A \cos w' - B \sin w') \\ &\quad - \sin i \cos i \{A(\sin w + \sin w') + B(\cos w + \cos w')\} \\ &\quad + \sin i^2 \{1 - (A \sin w + B \cos w)(A \sin w' + B \cos w')\} \\ &= \cos(w - w') \cdot (A^2 + B^2) \\ &\quad - \sin 2i \cos \frac{1}{2}(w - w') \{A \sin \frac{1}{2}(w + w') + B \cos \frac{1}{2}(w + w')\} \\ &\quad + \sin i^2 \{1 - (A \sin w + B \cos w)(A \sin w' + B \cos w')\}. \end{aligned}$$

Setzt man nun der Kürze wegen

$$82) \begin{cases} P = \sin(w - w') \\ \quad - 2 \operatorname{tang} i \sin \frac{1}{2}(w - w') \frac{A \sin \frac{1}{2}(w + w') B \cos \frac{1}{2}(w + w')}{A^2 + B^2}; \\ Q = \cos(w - w') \\ \quad - \sin 2i \cos \frac{1}{2}(w - w') \frac{A \sin \frac{1}{2}(w + w') + B \cos \frac{1}{2}(w + w')}{A^2 + B^2} \\ \quad + \sin i^2 \frac{1 - (A \sin w + B \cos w)(A \sin w' + B \cos w')}{A^2 + B^2}; \end{cases}$$

so ist

$$\begin{aligned} R(FG' - GF') &= -(A^2 + B^2) P \cos i, \\ R(FF' + GG') &= (A^2 + B^2) Q; \end{aligned}$$

folglich

$$\frac{FG' - GF'}{FF' + GG'} = -\frac{P}{Q} \cos i;$$

also nach 81)

$$83) \operatorname{tang}(\omega - \omega') = \frac{P}{Q} \cos i.$$

Mit Vernachlässigung von Gliedern, welche in Beziehung auf i von der zweiten Ordnung sind, kann man auch

$$84) \begin{cases} P' = \sin(w - w') \\ \quad - 2 \operatorname{tang} i \sin \frac{1}{2}(w - w') \frac{A \sin \frac{1}{2}(w + w') + B \cos \frac{1}{2}(w + w')}{A^2 + B^2}, \\ Q' = \cos(w - w') \\ \quad - \sin 2i \cos \frac{1}{2}(w - w') \frac{A \sin \frac{1}{2}(w + w') + B \cos \frac{1}{2}(w + w')}{A^2 + B^2} \end{cases}$$

setzen, und hat dann näherungsweise

$$85) \operatorname{tang}(\omega - \omega') = \frac{P'}{Q'} \cos i.$$

Nach 75) ist

$$\sin \delta = \Omega \sin J,$$

d. i., wenn man für Ω seinen aus 61) bekannten Werth setzt, wie man leicht findet:

$$\sin \delta = \sin J \sin \varphi \left\{ \cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i \right\} - \sin J \cos \varphi \left\{ \begin{aligned} &(A \cos w - B \sin w) \cos \Theta \\ &-(A \sin w + B \cos w) \sin \Theta \cos i \\ &+ \sin \Theta \sin i \end{aligned} \right\}.$$

Nun ist aber nach 64)

$$\sin J^2 = \frac{1}{1 + A^2 + B^2},$$

also

$$\cos J^2 = \frac{A^2 + B^2}{1 + A^2 + B^2},$$

und folglich

$$\cos J^2 = (A^2 + B^2) \sin J^2$$

oder

$$\cos J = \sin J \sqrt{A^2 + B^2},$$

also

$$\sin J = \frac{\cos J}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Daher ist nach dem Obigen

$$\begin{aligned} \sin \delta = \sin J \sin \varphi \{ & \cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i \} \\ & \left\{ \begin{aligned} & (A \cos w - B \sin w) \cos \Theta \\ & - (A \sin w + B \cos w) \sin \Theta \cos i \end{aligned} \right\} \\ & + \sin \Theta \sin i \\ - \cos J \cos \varphi & \frac{\quad}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \end{aligned}$$

Setzt man aber

$$86) \quad \tan \mu = \frac{B}{A},$$

so ist

$$\begin{aligned} & A \sin \frac{1}{2}(w + w') + B \cos \frac{1}{2}(w + w') \\ & = A \{ \sin \frac{1}{2}(w + w') + \cos \frac{1}{2}(w + w') \tan \mu \} \\ & = \frac{A}{\cos \mu} \sin \{ \frac{1}{2}(w + w') + \mu \}; \end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned} & A \sin w + B \cos w \\ & = A (\sin w + \cos w \tan \mu) \\ & = \frac{A}{\cos \mu} \sin (w + \mu), \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & A \cos w - B \sin w \\ & = A (\cos w - \sin w \tan \mu) \\ & = \frac{A}{\cos \mu} \cos (w + \mu). \end{aligned}$$

Auch ist, wie man leicht findet

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \pm \frac{A}{\cos \mu},$$

wo das obere oder untere Zeichen genommen werden muss, jenachdem die Grössen A und $\cos \mu$ gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben. Befolgt man aber nur die Regel, dass man, wenn

A positiv, B positiv;
 A negativ, B positiv;
 A negativ, B negativ;
 A positiv, B negativ

ist, respective

$$0 < \mu < 90^\circ,$$

$$90^\circ < \mu < 180^\circ,$$

$$180^\circ < \mu < 270^\circ,$$

$$270^\circ < \mu < 360^\circ$$

nimmt; so haben die Grössen A und $\cos \mu$ immer gleiche Vorzeichen, und man kann dann allgemein

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \frac{A}{\cos \mu},$$

also nach dem Obigen

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \cot J = \frac{A}{\cos \mu}$$

setzen.

Unter diesen Voraussetzungen ist nach dem Obigen

$$87) \begin{cases} P = \sin(w - w') \\ \quad - 2 \tan i \tan J \sin \frac{1}{2}(w - w') \sin \left\{ \frac{1}{2}(w + w') + \mu \right\}, \\ Q = \cos(w - w') \\ \quad - \sin 2i \tan J \cos \frac{1}{2}(w - w') \sin \left\{ \frac{1}{2}(w + w') + \mu \right\}, \\ \quad - \sin i^2 \{ \tan J^2 - \sin(w + \mu) \sin(w' + \mu) \} \end{cases}$$

und

$$88) \begin{cases} P' = \sin(w - w') \\ \quad - 2 \tan i \tan J \sin \frac{1}{2}(w - w') \sin \left\{ \frac{1}{2}(w + w') + \mu \right\}, \\ Q' = \cos(w - w') \\ \quad - \sin 2i \tan J \cos \frac{1}{2}(w - w') \sin \left\{ \frac{1}{2}(w + w') + \mu \right\}. \end{cases}$$

Ferner ist nach dem Obigen

$$89) \sin \delta = \sin J \sin \varphi \{ \cos i + \cot J \sin(w + \mu) \sin i \}$$

$$- \cos J \cos \varphi \left\{ \begin{aligned} &\cos(w + \mu) \cos \Theta \\ &- \sin(w + \mu) \sin \Theta \cos i \\ &+ \tan J \sin \Theta \sin i \end{aligned} \right\},$$

oder, wie man leicht findet:

$$90) \sin \delta = \sin J \sin \varphi \{ 1 + \cot J \sin(w + \mu) \sin i - 2 \sin \frac{1}{2} i^2 \}$$

$$- \cos J \cos \varphi \left\{ \begin{aligned} &\cos(w + \Theta + \mu) \\ &+ \tan J \sin \Theta \sin i \\ &+ 2 \sin(w + \mu) \sin \Theta \sin \frac{1}{2} i^2 \end{aligned} \right\};$$

oder auch

$$91) \sin \delta = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos(w + \Theta + \mu) \\ + \{ \cos J \sin \varphi \sin(w + \mu) - \sin J \cos \varphi \sin \Theta \} \sin i \\ - 2 \{ \sin J \sin \varphi + \cos J \cos \varphi \sin(w + \mu) \sin \Theta \} \sin \frac{1}{2} i^2.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$92) w + \Theta + \mu = v,$$

so ist

$$93) \quad \sin \delta = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v \\ + \{ \cos J \sin \varphi \sin (v - \Theta) - \sin J \cos \varphi \sin \Theta \} \sin i \\ - 2 \{ \sin J \sin \varphi + \cos J \cos \varphi \sin (v - \Theta) \sin \Theta \} \sin \frac{1}{2} i^2.$$

§. 8.

Für drei bei unverrückter Lage des Fernrohrs beobachtete Sterne, deren Declinationen wie früher $\delta, \delta', \delta''$ sein mögen, haben wir nun nach 93), da $\varphi, J, i, \Theta, \mu$ nach dem Vorhergehenden offenbar für die drei Beobachtungen constante Grössen sind, wenn wir durch w, w', w'' die den drei Beobachtungen entsprechenden Werthe des im Obigen im Allgemeinen durch w bezeichneten Winkels bezeichnen, und

$$v = w + \Theta + \mu,$$

$$v' = w' + \Theta + \mu,$$

$$v'' = w'' + \Theta + \mu$$

gesetzt wird, die drei folgenden in aller Strenge gültigen Gleichungen:

$$\sin \delta = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v \\ + \{ \cos J \sin \varphi \sin (v - \Theta) - \sin J \cos \varphi \sin \Theta \} \sin i \\ - 2 \{ \sin J \sin \varphi + \cos J \cos \varphi \sin (v - \Theta) \sin \Theta \} \sin \frac{1}{2} i^2;$$

$$\sin \delta' = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v' \\ + \{ \cos J \sin \varphi \sin (v' - \Theta) - \sin J \cos \varphi \sin \Theta \} \sin i \\ - 2 \{ \sin J \sin \varphi + \cos J \cos \varphi \sin (v' - \Theta) \sin \Theta \} \sin \frac{1}{2} i^2,$$

$$\sin \delta'' = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v'' \\ + \{ \cos J \sin \varphi \sin (v'' - \Theta) - \sin J \cos \varphi \sin \Theta \} \sin i \\ - 2 \{ \sin J \sin \varphi + \cos J \cos \varphi \sin (v'' - \Theta) \sin \Theta \} \sin \frac{1}{2} i^2.$$

Erinnert man sich an die im Obigen den Symbolen i, Θ, J beigelegte Bedeutung, so wird leicht erhellen, dass dem Beobachter bei Anordnung der Beobachtungen eine im Ganzen freie Disposition über diese Grössen zusteht. Ordnet man nun die Beobachtungen so an, dass die Grössen $\sin i, \sin \Theta, \cos J$ der Null so nahe wie möglich kommen, so kann man, da die absoluten Werthe der Grössen

$$\cos J \sin i, \sin \Theta \sin i, \sin \frac{1}{2} i^2$$

dann kleine Grössen der zweiten Ordnung sind, erst mit Vernachlässigung kleiner Grössen der zweiten Ordnung näherungsweise

$$94) \quad \begin{cases} \sin \delta = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v, \\ \sin \delta' = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v', \\ \sin \delta'' = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v''; \end{cases}$$

also

$$95) \quad \begin{cases} \sin \delta = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v, \\ \sin \delta' = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos \{v + (v' - v)\}, \\ \sin \delta'' = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos \{v + (v'' - v)\}; \end{cases}$$

und folglich, weil nach dem Obigen

$$\begin{aligned} v' - v &= w' - w, \\ v'' - v &= w'' - w, \end{aligned}$$

ist,

$$96) \begin{cases} \sin \delta = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v, \\ \sin \delta' = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos \{v + (w' - w)\}, \\ \sin \delta'' = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos \{v + (w'' - w)\} \end{cases}$$

setzen.

Die Differenzen $w' - w$, $w'' - w$ werden, wie aus der aus dem vorhergehenden Paragraphen bekannten Bedeutung der Winkel w , w' , w'' auf der Stelle von selbst erhellet, unmittelbar aus den auf dem Limbus des Theodoliten gemachten Ablesungen erhalten, und können daher als bekannt betrachtet werden, so dass also die drei vorhergehenden Gleichungen nur die drei unbekannten Grössen J , v , φ enthalten. Um nun die letzte dieser drei Grössen, nämlich die Polhöhe, zu finden, ziehe man die zweite und dritte Gleichung von der ersten ab, so erhält man die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sin \delta - \sin \delta' &= -\cos J \cos \varphi \{\cos v - \cos (v + (w' - w))\}, \\ \sin \delta - \sin \delta'' &= -\cos J \cos \varphi \{\cos v - \cos (v + (w'' - w))\}; \end{aligned}$$

also nach bekannten goniometrischen Formeln

$$\begin{aligned} &\sin \frac{1}{2}(\delta - \delta') \cos \frac{1}{2}(\delta + \delta') \\ &= \cos J \cos \varphi \sin \frac{1}{2}(w' - w) \sin \{v + \frac{1}{2}(w' - w)\}, \\ &\sin \frac{1}{2}(\delta - \delta'') \cos \frac{1}{2}(\delta + \delta'') \\ &= \cos J \cos \varphi \sin \frac{1}{2}(w'' - w) \sin \{v + \frac{1}{2}(w'' - w)\}; \end{aligned}$$

und folglich, wenn man der Kürze wegen

$$97) \begin{cases} \mathfrak{M} = \sin \frac{1}{2}(\delta - \delta') \cos \frac{1}{2}(\delta + \delta') \sin \frac{1}{2}(w'' - w), \\ \mathfrak{N} = \sin \frac{1}{2}(\delta - \delta'') \cos \frac{1}{2}(\delta + \delta'') \sin \frac{1}{2}(w' - w) \end{cases}$$

setzt:

$$98) \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}} = \frac{\sin \{v + \frac{1}{2}(w' - w)\}}{\sin \{v + \frac{1}{2}(w'' - w)\}},$$

woraus man ferner ohne Schwierigkeit

$$\begin{aligned} 99) \frac{\mathfrak{M} - \mathfrak{N}}{\mathfrak{M} + \mathfrak{N}} \\ = \tan \frac{1}{4} \{(w' - w) - (w'' - w)\} \cot \{v + \frac{1}{4}(w' - w) + \frac{1}{4}(w'' - w)\} \end{aligned}$$

erhält. Berechnet man aber den Hülfswinkel ζ mittelst der Formel

$$100) \tan \zeta = \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}},$$

so wird

$$\begin{aligned} 101) \tan \{v + \frac{1}{4}(w' - w) + \frac{1}{4}(w'' - w)\} \\ = \tan (45^\circ + \zeta) \tan \frac{1}{4} \{(w' - w) - (w'' - w)\}. \end{aligned}$$

Aus den beiden ersten der drei Gleichungen 96) folgt

$$\cos J \cos \varphi = - \frac{\sin \delta - \sin \delta'}{\cos v - \cos \{v + (w' - w)\}},$$

$$\sin J \sin \varphi = - \frac{\sin \delta \cos \{v + (w' - w)\} - \sin \delta' \cos v}{\cos v - \cos \{v + (w' - w)\}};$$

oder

$$102) \begin{cases} \cos J \cos \varphi = - \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta - \delta') \cos \frac{1}{2}(\delta + \delta')}{\sin \frac{1}{2}(w' - w) \sin \{v + \frac{1}{2}(w' - w)\}}, \\ \sin J \sin \varphi = - \frac{\sin \delta \cos \{v + (w' - w)\} - \sin \delta' \cos v}{\sin \frac{1}{2}(w' - w) \sin \{v + \frac{1}{2}(w' - w)\}}. \end{cases}$$

Bezeichnen wir einen der Gleichung 101) genügenden Werth von

$v + \frac{1}{4}(w' - w) + \frac{1}{4}(w'' - w)$ durch v_1 , so ist, wenn k eine positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, bekanntlich

$$v + \frac{1}{4}(w' - w) + \frac{1}{4}(w'' - w) = v_1 + k\pi,$$

und folglich

$$103) v = v_1 - \frac{1}{4}(w' - w) - \frac{1}{4}(w'' - w) + k\pi$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$104) u = v_1 - \frac{1}{4}(w' - w) - \frac{1}{4}(w'' - w)$$

setzen:

$$105) v = u + k\pi.$$

Also ist nach 102), wie man leicht findet:

$$106) \begin{cases} \cos J \cos \varphi = - \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta - \delta') \cos \frac{1}{2}(\delta + \delta')}{\sin \frac{1}{2}(w' - w) \sin \{u + \frac{1}{2}(w' - w)\}} \cdot (-1)^k, \\ \sin J \sin \varphi = - \frac{\sin \delta \cos \{u + (w' - w)\} - \sin \delta' \cos u}{\sin \frac{1}{2}(w' - w) \sin \{u + \frac{1}{2}(w' - w)\}}. \end{cases}$$

Weil nun die Grössen

$\cos J \cos \varphi$, $\sin J \sin \varphi$ offenbar immer positiv sind, so ist, wenn wir die absoluten Werthe von

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\delta - \delta') \cos \frac{1}{2}(\delta + \delta')}{\sin \frac{1}{2}(w' - w) \sin \{u + \frac{1}{2}(w' - w)\}},$$

$$\frac{\sin \delta \cos \{u + (w' - w)\} - \sin \delta' \cos u}{\sin \frac{1}{2}(w' - w) \sin \{u + \frac{1}{2}(w' - w)\}}$$

respective durch

bezeichnen, offenbar

$$\cos J \cos \varphi = \mathfrak{R}, \quad \sin J \sin \varphi = \mathfrak{E};$$

also durch Addition und Subtraction

$$107) \begin{cases} \cos(J - \varphi) = R + \varepsilon, \\ \cos(J + \varphi) = R - \varepsilon. \end{cases}$$

Der absolute Werth von $J - \varphi$ übersteigt 90° nicht, und $J + \varphi$ ist nicht grösser als 180° . Bezeichnet also D den absoluten Werth von $J - \varphi$, und S den Werth von $J + \varphi$, so ist

$$J - \varphi = \pm D, \quad J + \varphi = S;$$

also

$$108) \quad J = \frac{1}{2}(S \pm D), \quad \varphi = \frac{1}{2}(S \mp D).$$

Ob man die obern oder die untern Zeichen in diesen Formeln zu nehmen hat, lässt sich nur dadurch entscheiden, dass man sich durch Beobachtung wenigstens einen genäherten Werth von J verschafft, zu welchem Zwecke am besten am Theodoliten, wie dies auch meistens der Fall ist, ein wenn auch nur eine untergeordnete Genauigkeit gewährender Höhenkreis angebracht wird.

Bis jetzt haben wir die Grössen δ , δ' , δ'' und $w' - w$, $w'' - w$ als fehlerfrei betrachtet. Die ersteren können aber wegen der Unrichtigkeit der Sternverzeichnisse, die letzteren wegen der Unrichtigkeit der Theilung des Limbus des Theodoliten und der Ablesung mit Fehlern behaftet sein, und wir wollen daher nun noch untersuchen, welchen Einfluss diese Fehler auf die Bestimmung der Polhöhe ausüben.

Betrachten wir zu dem Ende die Fehler wie gewöhnlich als Differentiale, so haben wir nach dem Obigen eigentlich die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sin(\delta + d\delta) &= \sin(J + dJ) \sin(\varphi + d\varphi) \\ &\quad - \cos(J + dJ) \cos(\varphi + d\varphi) \cos(v + dv), \\ \sin(\delta' + d\delta') &= \sin(J + dJ) \sin(\varphi + d\varphi) \\ &\quad - \cos(J + dJ) \cos(\varphi + d\varphi) \cos\{v + dv + (w' - w) + d(w' - w)\}, \\ \sin(\delta'' + d\delta'') &= \sin(J + dJ) \sin(\varphi + d\varphi) \\ &\quad - \cos(J + dJ) \cos(\varphi + d\varphi) \cos\{v + dv + (w'' - w) + d(w'' - w)\}; \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \sin(\delta + d\delta) &= \sin(J + dJ) \sin(\varphi + d\varphi) \\ &\quad - \cos(J + dJ) \cos(\varphi + d\varphi) \cos(v + dv), \\ \sin(\delta' + d\delta') &= \sin(J + dJ) \sin(\varphi + d\varphi) \\ &\quad - \cos(J + dJ) \cos(\varphi + d\varphi) \cos\{v' + dv + d(w' - w)\}, \\ \sin(\delta'' + d\delta'') &= \sin(J + dJ) \sin(\varphi + d\varphi) \\ &\quad - \cos(J + dJ) \cos(\varphi + d\varphi) \cos\{v'' + dv + d(w'' - w)\}. \end{aligned}$$

Also ist nach den Principien der Differentialrechnung:

$$\begin{aligned} \sin \delta + \cos \delta d\delta &= \\ &= \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v \\ &\quad + (\cos J \sin \varphi + \sin J \cos \varphi \cos v) dJ \\ &\quad + (\sin J \cos \varphi + \cos J \sin \varphi \cos v) d\varphi \\ &\quad + \cos J \cos \varphi \sin v dv, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sin \delta + \cos \delta d\delta \\
&= \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v \\
&\quad + (\cos J \sin \varphi + \sin J \cos \varphi \cos v) dJ \\
&\quad + (\sin J \cos \varphi + \cos J \sin \varphi \cos v) d\varphi \\
&\quad + \cos J \cos \varphi \sin v \{dv + d(w' - w)\}, \\
& \sin \delta'' + \cos \delta'' d\delta'' \\
&= \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v'' \\
&\quad + (\cos J \sin \varphi + \sin J \cos \varphi \cos v'') dJ \\
&\quad + (\sin J \cos \varphi + \cos J \sin \varphi \cos v'') d\varphi \\
&\quad + \cos J \cos \varphi \sin v'' \{dv + d(w'' - w)\}.
\end{aligned}$$

Weil nun aber nach dem Obigen

$$\begin{aligned}
\sin \delta &= \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v, \\
\sin \delta' &= \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v', \\
\sin \delta'' &= \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v''
\end{aligned}$$

ist, so lassen sich die obigen Gleichungen unter der folgenden einfachern Form darstellen:

$$\begin{aligned}
\cos \delta d\delta &= (\cos J \sin \varphi + \sin J \cos \varphi \cos v) dJ \\
&\quad + (\sin J \cos \varphi + \cos J \sin \varphi \cos v) d\varphi \\
&\quad + \cos J \cos \varphi \sin v dv, \\
\cos \delta' d\delta' &= (\cos J \sin \varphi + \sin J \cos \varphi \cos v') dJ \\
&\quad + (\sin J \cos \varphi + \cos J \sin \varphi \cos v') d\varphi \\
&\quad + \cos J \cos \varphi \sin v' \{dv + d(w' - w)\}, \\
\cos \delta'' d\delta'' &= (\cos J \sin \varphi + \sin J \cos \varphi \cos v'') dJ \\
&\quad + (\sin J \cos \varphi + \cos J \sin \varphi \cos v'') d\varphi \\
&\quad + \cos J \cos \varphi \sin v'' \{dv + d(w'' - w)\};
\end{aligned}$$

oder, wie sich aus diesen Gleichungen sogleich ergibt:

$$\begin{aligned}
\cos \delta d\delta &= (\cos J \sin \varphi + \sin J \cos \varphi \cos v) dJ \\
&\quad + \cos J \cos \varphi \sin v dv \\
&\quad + (\sin J \cos \varphi + \cos J \sin \varphi \cos v) d\varphi, \\
\cos \delta' d\delta' - \sin J \cos \varphi \sin v' d(w' - w) &= (\cos J \sin \varphi + \sin J \cos \varphi \cos v') dJ \\
&\quad + \cos J \cos \varphi \sin v' dv \\
&\quad + (\sin J \cos \varphi + \cos J \sin \varphi \cos v') d\varphi, \\
\cos \delta'' d\delta'' - \sin J \cos \varphi \sin v'' d(w'' - w) &= (\cos J \sin \varphi + \sin J \cos \varphi \cos v'') dJ \\
&\quad + \cos J \cos \varphi \sin v'' dv \\
&\quad + (\sin J \cos \varphi + \cos J \sin \varphi \cos v'') d\varphi.
\end{aligned}$$

Der Kürze wegen wollen wir diese drei Gleichungen durch

$$\begin{aligned}
A &= adJ + b dv + c d\varphi, \\
A' &= a' dJ + b' dv + c' d\varphi, \\
A'' &= a'' dJ + b'' dv + c'' d\varphi
\end{aligned}$$

bezeichnen, wo die Bedeutung der Symbole

$$A, A', A''$$

und

$$a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''$$

von selbst erhellet.

Durch Elimination von dv erhalten wir die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} Ab' - A'b &= (ab' - a'b) dJ + (cb' - c'b) d\varphi, \\ Ab'' - A''b &= (ab'' - a''b) dJ + (cb'' - c''b) d\varphi. \end{aligned}$$

Nun ist aber, wie man mit Hülfe einiger bekannten goniometrischen Relationen leicht findet:

$$\begin{aligned} ab' - a'b &= \\ - 2 \cos J \cos \varphi \sin \frac{1}{2}(v - v') &\left\{ \begin{aligned} &\cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(v + v') \\ &+ \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(v - v') \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} cb' - c'b &= \\ - 2 \cos J \cos \varphi \sin \frac{1}{2}(v - v') &\left\{ \begin{aligned} &\sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(v + v') \\ &+ \cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(v - v') \end{aligned} \right\}, \end{aligned}$$

so wie auf ähnliche Art

$$\begin{aligned} ab'' - a''b &= \\ - 2 \cos J \cos \varphi \sin \frac{1}{2}(v - v'') &\left\{ \begin{aligned} &\cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(v + v'') \\ &+ \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(v - v'') \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} cb'' - c''b &= \\ - 2 \cos J \cos \varphi \sin \frac{1}{2}(v - v'') &\left\{ \begin{aligned} &\sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(v + v'') \\ &+ \cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(v - v'') \end{aligned} \right\}; \end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned} Ab' - A'b &= (A \sin v' - A' \sin v) \cos J \cos \varphi, \\ Ab'' - A''b &= (A \sin v'' - A'' \sin v) \cos J \cos \varphi. \end{aligned}$$

Also hat man nach dem Obigen die beiden folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} &= \frac{A \sin v' - A' \sin v}{2 \sin \frac{1}{2}(v - v')} \\ &= \{ \cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(v + v') + \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(v - v') \} dJ \\ &\quad + \{ \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(v + v') + \cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(v - v') \} d\varphi, \\ &= \frac{A \sin v'' - A'' \sin v}{2 \sin \frac{1}{2}(v - v'')} \\ &= \{ \cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(v + v'') + \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(v - v'') \} dJ \\ &\quad + \{ \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(v + v'') + \cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(v - v'') \} d\varphi. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir nun diese beiden Gleichungen der Kürze wegen durch

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \alpha dJ + \beta d\varphi, \\ \mathcal{X}' &= \alpha' dJ + \beta' d\varphi; \end{aligned}$$

so ist

$$\mathcal{X}\alpha' - \mathcal{X}'\alpha = -(\alpha\beta' - \alpha'\beta) d\varphi.$$

Ohne Schwierigkeit findet man aber mit Hülfe bekannter goniometrischer Relationen

und

$$\begin{aligned}
&= \sin v \sin (J - \varphi) \sin (J + \varphi) \sin \frac{1}{2} (v' - v'') \\
&2 (\mathcal{A} \alpha' - \mathcal{A}' \alpha) \frac{\sin \frac{1}{2} (v - v') \sin \frac{1}{2} (v'' - v)}{\sin v} \\
&= A \sin \frac{1}{2} (v' - v'') \left\{ \begin{array}{l} \cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2} (v' + v'') \\ + \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2} (v' - v'') \end{array} \right\} \\
&+ A' \sin \frac{1}{2} (v'' - v) \left\{ \begin{array}{l} \cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2} (v'' + v) \\ + \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2} (v'' - v) \end{array} \right\} \\
&+ A'' \sin \frac{1}{2} (v - v') \left\{ \begin{array}{l} \cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2} (v + v') \\ + \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2} (v - v') \end{array} \right\}.
\end{aligned}$$

Also ist nach dem Obigen

$$\begin{aligned}
109) \quad d\varphi = & \frac{\cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2} (v' + v'') + \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2} (v' - v'')}{2 \sin (J - \varphi) \sin (J + \varphi) \sin \frac{1}{2} (v - v') \sin \frac{1}{2} (v'' - v)} A \\
& - \frac{\cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2} (v'' + v) + \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2} (v'' - v)}{2 \sin (J - \varphi) \sin (J + \varphi) \sin \frac{1}{2} (v' - v'') \sin \frac{1}{2} (v - v')} A' \\
& - \frac{\cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2} (v + v') + \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2} (v - v')}{2 \sin (J - \varphi) \sin (J + \varphi) \sin \frac{1}{2} (v'' - v) \sin \frac{1}{2} (v' - v'')} A''
\end{aligned}$$

oder nach dem Obigen

$$\begin{aligned}
110) \quad dq = & \frac{\cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2} (v' + v'') + \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2} (v' - v'')}{2 \sin (J - \varphi) \sin (J + \varphi) \sin \frac{1}{2} (w - w') \sin \frac{1}{2} (w'' - w)} A \\
& - \frac{\cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2} (v'' + v) + \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2} (v'' - v)}{2 \sin (J - \varphi) \sin (J + \varphi) \sin \frac{1}{2} (w' - w'') \sin \frac{1}{2} (w - w')} A' \\
& - \frac{\cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2} (v + v') + \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2} (v - v')}{2 \sin (J - \varphi) \sin (J + \varphi) \sin \frac{1}{2} (w'' - w) \sin \frac{1}{2} (w' - w'')} A'',
\end{aligned}$$

wo nach dem Obigen

$$111) \quad \begin{cases} A = \cos \delta d\delta, \\ A' = \cos \delta' d\delta' - \sin J \cos \varphi \sin v' d(w' - w), \\ A'' = \cos \delta'' d\delta'' - \sin J \cos \varphi \sin v'' d(w'' - w) \end{cases}$$

ist.

§. 9.

Aus den sämtlichen im vorhergehenden Paragraphen angestellten Untersuchungen lassen sich nun die folgenden für die praktische Anwendung unserer Methode, die Polhöhe zu bestimmen, jedenfalls sehr wichtigen Resultate ziehen.

1. Zuvörderst wissen wir aus dem vorhergehenden Paragraphen, dass $\sin \Theta$ der Null möglichst nahe kommen muss. Nun ist aber Θ der von dem positiven Theile der Axe der x_2 , welche die Durchschnittslinie der Ebene des Limbus des

Theodoliten mit der Ebene des Horizonts ist, mit dem positiven Theile der Axe der x , welche die Mittagslinie ist, eingeschlossene, von dem positiven Theile der Axe der x an durch den rechten Winkel (xy) hindurch von 0 bis 360° gezählte Winkel, und es muss also die Durchschnittslinie der Ebene des Limbus des Theodoliten mit der Ebene des Horizonts möglichst nahe mit der Mittagslinie zusammenfallen. Bei der Horizontalstellung des Limbus des Theodoliten stellt man bekanntlich das Niveau zuerst parallel mit der durch die Köpfe zweier Fusschrauben des Theodoliten gehenden geraden Linie, und dann senkrecht gegen dieselbe Linie. Daher wird man, um die Durchschnittslinie der Ebene des Limbus des Theodoliten mit der Ebene des Horizonts möglichst nahe mit der Mittagslinie zusammenfallend zu machen, vor der Horizontalstellung des Limbus jederzeit den Theodoliten so aufzustellen haben, dass die durch die Köpfe zweier Fusschrauben gehende gerade Linie, mit welcher man bei der Horizontalstellung des Limbus das Niveau parallel zu stellen beabsichtigt, mit der Mittagslinie möglichst nahe zusammenfällt, oder von Süden nach Norden gerichtet ist.

2. Nach dem vorhergehenden Paragraphen muss ferner $\sin i$ der Null möglichst nahe kommen, und auf die Erfüllung dieser Bedingung ist, wie sich aus der im vorhergehenden Paragraphen angestellten Untersuchung auf die unzweideutigste Weise ergibt, jedenfalls eine ganz vorzügliche Sorgfalt zu verwenden. Da nun bekanntlich i der 90° nicht übersteigende, positiv oder negativ genommene Neigungswinkel der Ebene des Limbus des Theodoliten gegen die Ebene des Horizonts ist, so muss man die Ebene des Limbus des Theodoliten mit aller nur möglichen Sorgfalt horizontal stellen, und ein sehr gutes Niveau ist daher jedenfalls als ein Haupterforderniss bei der Anwendung unserer Methode zur Bestimmung der Polhöhe zu betrachten, wie sich dies auch gleich nachher noch weiter herausstellen wird. Hierbei bemerken wir aber zugleich auch noch, dass, wie sich aus den im vorhergehenden Paragraphen angestellten Entwicklungen von selbst ergibt, die übrigen gewöhnlichen Berichtigungen des Theodoliten — die Horizontalstellung der Drehungsaxe des Fernrohrs, die Berichtigung der Visirlinie des Fernrohrs — als für unsere Methode zur Bestimmung der Polhöhe ganz unwesentliche Erfordernisse zu betrachten sind, indem es nach dem vorhergehenden Paragraphen bei der Anwendung dieser Methode offenbar bloss darauf ankommt, dass die Lage der Visirlinie gegen die Ebene des Limbus des Theodoliten für alle drei Beobachtungen als constant betrachtet werden kann, weshalb es jedenfalls bei der Anwendung dieser Methode auch als eine nicht zu übersehende Rücksicht angesehen werden muss,

$$53) \begin{cases} F = \frac{\sin i - (A \sin w + B \cos w) \cos i}{\cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i}, \\ G = \frac{A \cos w - B \sin w}{\cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i}, \\ K = \frac{M}{\cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i}, \\ L = \frac{N}{\cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i} \end{cases}$$

gesetzt wird, die folgenden Gleichungen der nach dem Sterne S gerichteten Visirlinie des Fernrohrs im Systeme der xyz :

$$54) \begin{cases} x = (F \sin \Theta + G \cos \Theta) z - K, \\ y = -(F \cos \Theta - G \sin \Theta) z + L; \end{cases}$$

und weil nun diese Linie der durch den Punkt O und den Stern S gezogenen Linie parallel ist; so haben wir nach 44) und 54), wie die analytische Geometrie lehrt*), die beiden folgenden Gleichungen:

$$55) \begin{cases} F \sin \Theta + G \cos \Theta = - \frac{\sin \delta \cos \varphi - \cos \sigma \cos \delta \sin \varphi}{\sin \delta \sin \varphi + \cos \sigma \cos \delta \cos \varphi}, \\ F \cos \Theta - G \sin \Theta = - \frac{\sin \sigma \cos \delta}{\sin \delta \sin \varphi + \cos \sigma \cos \delta \cos \varphi}. \end{cases}$$

Aus der ersten dieser beiden Gleichungen erhält man ohne alle Schwierigkeit

$$56) \cos \sigma = \tan \delta \frac{\cos \varphi + (F \sin \Theta + G \cos \Theta) \sin \varphi}{\sin \varphi - (F \sin \Theta + G \cos \Theta) \cos \varphi},$$

und folglich

$$\begin{aligned} & \frac{\sin \delta \sin \varphi + \cos \sigma \cos \delta \cos \varphi}{\sin \varphi - (F \sin \Theta + G \cos \Theta) \cos \varphi} \\ &= \frac{\sin \delta}{\sin \varphi - (F \sin \Theta + G \cos \Theta) \cos \varphi}. \end{aligned}$$

Weil nun nach der zweiten der Gleichungen 55)

$$\sin \sigma = - \frac{(F \cos \Theta - G \sin \Theta) (\sin \delta \sin \varphi + \cos \sigma \cos \delta \cos \varphi)}{\cos \delta}$$

ist, so ist

$$57) \sin \sigma = - \tan \delta \frac{F \cos \Theta - G \sin \Theta}{\sin \varphi - (F \sin \Theta + G \cos \Theta) \cos \varphi}.$$

Auch ist nach 56) und 57)

$$58) \tan \sigma = - \frac{F \cos \Theta - G \sin \Theta}{\cos \varphi + (F \sin \Theta + G \cos \Theta) \sin \varphi}.$$

Aus den Gleichungen 56) und 57) erhält man die folgende, den Stundenwinkel σ nicht mehr enthaltende Gleichung:

*) A. a. O. S. 182.

$$59) \{ \sin \varphi - (F \sin \Theta + G \cos \Theta) \cos \varphi \}^2 \\ = \tan \delta^2 \left\{ (F \cos \Theta - G \sin \Theta)^2 \right. \\ \left. + [\cos \varphi + (F \sin \Theta + G \cos \Theta) \sin \varphi]^2 \right\}.$$

Setzt man aber

$$\tan \delta^2 = \frac{\sin \delta^2}{1 - \sin \delta^2},$$

so ergibt sich aus der vorhergehenden Gleichung ohne Schwierigkeit die Gleichung

$$\{ \sin \varphi - (F \sin \Theta + G \cos \Theta) \cos \varphi \}^2 \\ = \sin \delta^2 \left\{ (F \cos \Theta - G \sin \Theta)^2 \right. \\ \left. + [\sin \varphi - (F \sin \Theta + G \cos \Theta) \cos \varphi]^2 \right. \\ \left. + [\cos \varphi + (F \sin \Theta + G \cos \Theta) \sin \varphi]^2 \right\},$$

welche durch gehörige Entwicklung der eingeklammerten Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens leicht auf die Form

$$60) \sin \delta^2 = \frac{\{ \sin \varphi - (F \sin \Theta + G \cos \Theta) \cos \varphi \}^2}{1 + F^2 + G^2}$$

gebracht wird.

Nun ist aber nach 53), wie man durch leichte Rechnung findet,

$$1 + F^2 + G^2 = \frac{1 + A^2 + B^2}{\{ \cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i \}^2};$$

und, wenn der Kürze wegen

$$61) \Omega = \cos i \sin \varphi - \sin i \sin \Theta \cos \varphi \\ + \{ \sin w \sin i \sin \varphi - (\cos w \cos \Theta - \sin w \sin \Theta \cos i) \cos \varphi \} A \\ + \{ \cos w \sin i \sin \varphi + (\sin w \cos \Theta + \cos w \sin \Theta \cos i) \cos \varphi \} B$$

gesetzt wird,

$$\sin \varphi - (F \sin \Theta + G \cos \Theta) \cos \varphi \\ = \frac{\Omega}{\cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i}.$$

Also hat man nach 60) die Gleichung

$$62) \sin \delta^2 = \frac{\Omega^2}{1 + A^2 + B^2},$$

oder die Gleichung

$$63) (1 + A^2 + B^2) \sin \delta^2 = \Omega^2.$$

Bezeichnet J den Neigungswinkel der Visirlinie des Fernrohrs gegen die Ebene des Limbus des Theodoliten oder, was dasselbe ist, gegen die Ebene, welche die Nonien

$$53) \begin{cases} F = \frac{\sin i - (A \sin w + B \cos w) \cos i}{\cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i}, \\ G = \frac{A \cos w - B \sin w}{\cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i}, \\ K = \frac{M}{\cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i}, \\ L = \frac{N}{\cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i} \end{cases}$$

gesetzt wird, die folgenden Gleichungen der nach dem Sterne S gerichteten Visirlinie des Fernrohrs im Systeme der xyz :

$$54) \begin{cases} x = (F \sin \Theta + G \cos \Theta) z - K, \\ y = -(F \cos \Theta - G \sin \Theta) z + L; \end{cases}$$

und weil nun diese Linie der durch den Punkt O und den Stern S gezogenen Linie parallel ist; so haben wir nach 44) und 54), wie die analytische Geometrie lehrt*), die beiden folgenden Gleichungen:

$$55) \begin{cases} F \sin \Theta + G \cos \Theta = - \frac{\sin \delta \cos \varphi - \cos \sigma \cos \delta \sin \varphi}{\sin \delta \sin \varphi + \cos \sigma \cos \delta \cos \varphi}, \\ F \cos \Theta - G \sin \Theta = - \frac{\sin \sigma \cos \delta}{\sin \delta \sin \varphi + \cos \sigma \cos \delta \cos \varphi}. \end{cases}$$

Aus der ersten dieser beiden Gleichungen erhält man ohne alle Schwierigkeit

$$56) \cos \sigma = \tan \delta \frac{\cos \varphi + (F \sin \Theta + G \cos \Theta) \sin \varphi}{\sin \varphi - (F \sin \Theta + G \cos \Theta) \cos \varphi},$$

und folglich

$$\begin{aligned} & \frac{\sin \delta \sin \varphi + \cos \sigma \cos \delta \cos \varphi}{\sin \delta} \\ &= \frac{\sin \delta}{\sin \varphi - (F \sin \Theta + G \cos \Theta) \cos \varphi}. \end{aligned}$$

Weil nun nach der zweiten der Gleichungen 55)

$$\sin \sigma = - \frac{(F \cos \Theta - G \sin \Theta) (\sin \delta \sin \varphi + \cos \sigma \cos \delta \cos \varphi)}{\cos \delta}$$

ist, so ist

$$57) \sin \sigma = - \tan \delta \frac{F \cos \Theta - G \sin \Theta}{\sin \varphi - (F \sin \Theta + G \cos \Theta) \cos \varphi}.$$

Auch ist nach 56) und 57)

$$58) \tan \sigma = - \frac{F \cos \Theta - G \sin \Theta}{\cos \varphi + (F \sin \Theta + G \cos \Theta) \sin \varphi}.$$

Aus den Gleichungen 56) und 57) erhält man die folgende, den Stundenwinkel σ nicht mehr enthaltende Gleichung:

*) A. a. O. S. 182.

$$59) \{ \sin \varphi - (F \sin \Theta + G \cos \Theta) \cos \varphi \}^2 \\ = \tan^2 \delta^2 \left\{ \begin{array}{l} (F \cos \Theta - G \sin \Theta)^2 \\ + [\cos \varphi + (F \sin \Theta + G \cos \Theta) \sin \varphi]^2 \end{array} \right\}.$$

Setzt man aber

$$\tan \delta^2 = \frac{\sin \delta^2}{1 - \sin \delta^2},$$

so ergibt sich aus der vorhergehenden Gleichung ohne Schwierigkeit die Gleichung

$$\{ \sin \varphi - (F \sin \Theta + G \cos \Theta) \cos \varphi \}^2 \\ = \sin^2 \delta^2 \left\{ \begin{array}{l} (F \cos \Theta - G \sin \Theta)^2 \\ + [\sin \varphi - (F \sin \Theta + G \cos \Theta) \cos \varphi]^2 \\ + [\cos \varphi + (F \sin \Theta + G \cos \Theta) \sin \varphi]^2 \end{array} \right\},$$

welche durch gehörige Entwicklung der eingeklammerten Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens leicht auf die Form

$$60) \sin \delta^2 = \frac{\{ \sin \varphi - (F \sin \Theta + G \cos \Theta) \cos \varphi \}^2}{1 + F^2 + G^2}$$

gebracht wird.

Nun ist aber nach 53), wie man durch leichte Rechnung findet,

$$1 + F^2 + G^2 = \frac{1 + A^2 + B^2}{\{ \cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i \}^2};$$

und, wenn der Kürze wegen

$$61) \Omega = \cos i \sin \varphi - \sin i \sin \Theta \cos \varphi \\ + \{ \sin w \sin i \sin \varphi - (\cos w \cos \Theta - \sin w \sin \Theta \cos i) \cos \varphi \} A \\ + \{ \cos w \sin i \sin \varphi + (\sin w \cos \Theta + \cos w \sin \Theta \cos i) \cos \varphi \} B$$

gesetzt wird,

$$\sin \varphi - (F \sin \Theta + G \cos \Theta) \cos \varphi \\ = \frac{\Omega}{\cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i}.$$

Also hat man nach 60) die Gleichung

$$62) \sin \delta^2 = \frac{\Omega^2}{1 + A^2 + B^2},$$

oder die Gleichung

$$63) (1 + A^2 + B^2) \sin \delta^2 = \Omega^2.$$

Bezeichnet J den Neigungswinkel der Visirlinie des Fernrohrs gegen die Ebene des Limbus des Theodoliten oder, was dasselbe ist, gegen die Ebene, welche die Nonien

trägt, so ist nach den Principien der analytischen Geometrie *)

$$64) \sin J = \frac{1}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}},$$

und die Gleichung 63) kann daher auch unter der Form

$$65) \left(\frac{\sin \delta}{\sin J} \right)^2 = \Omega^2$$

dargestellt werden.

Wenn wir das Azimuth und die Höhe des Sterns S respective durch ω und h , und die Coordinaten eines beliebigen Punktes in dem Theile OS der durch O und den Stern S gezogenen geraden Linie oder dessen Verlängerung über S hinaus in dem Systeme der xyz durch ξ , η , ζ , die Entfernung dieses Punktes von dem Punkte O aber durch ϱ bezeichnen; so ist offenbar in völliger Allgemeinheit

$$66) \begin{cases} \xi = \varrho \cos \omega \cos h, \\ \eta = \varrho \sin \omega \cos h, \\ \zeta = \varrho \sin h; \end{cases}$$

und folglich sind, wie sich hieraus leicht ergibt,

$$67) \begin{cases} x = z \cos \omega \cot h, \\ y = z \sin \omega \cot h \end{cases}$$

die Gleichungen der durch den Punkt O und den Stern S gezogenen geraden Linie im Systeme der xyz . Weil nun diese gerade Linie der nach dem Sterne S gerichteten Visirlinie des Fernrohrs parallel ist, so erhalten wir, indem wir die vorstehenden Gleichungen mit den Gleichungen 54) vergleichen, nach den Principien der analytischen Geometrie **) die folgenden Gleichungen:

$$68) \begin{cases} F \sin \Theta + G \cos \Theta = \cos \omega \cot h, \\ F \cos \Theta - G \sin \Theta = -\sin \omega \cot h; \end{cases}$$

aus denen sich auch leicht

$$69) \begin{cases} F = \sin (\Theta - \omega) \cot h, \\ G = \cos (\Theta - \omega) \cot h; \end{cases}$$

und hieraus

$$70) F^2 + G^2 = \cot^2 h$$

ergibt.

Führt man in die Gleichungen 68) für F und G ihre aus 53) bekannten Ausdrücke ein, so erhält man die folgenden Gleichungen:

*) A. a. O. S. 220.

**) A. a. O. S. 182.

$$71) \left\{ \begin{array}{l} (\cos w \cos \Theta - \sin w \sin \Theta \cos i) A \\ - (\sin w \cos \Theta + \cos w \sin \Theta \cos i) B \\ = \{ \cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i \} \cos w \cot h \\ - \sin \Theta \sin i, \\ (\cos w \sin \Theta + \sin w \cos \Theta \cos i) A \\ - (\sin w \sin \Theta - \cos w \cos \Theta \cos i) B \\ = \{ \cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i \} \sin w \cot h \\ + \cos \Theta \sin i. \end{array} \right.$$

Also ist nach 61)

$$72) \Omega = (\sin \varphi - \cos w \cot h \cos \varphi) \{ \cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i \}$$

oder

$$73) \Omega = \frac{(\sin h \sin \varphi - \cos w \cos h \cos \varphi) \{ \cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i \}}{\sin h}.$$

Weil nun aber nach 6)

$$\sin \delta = \sin h \sin \varphi - \cos w \cos h \cos \varphi$$

ist, so ist

$$74) \Omega = \frac{\sin \delta}{\sin h} \{ \cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i \}.$$

Nach 65) ist

$$\frac{\sin \delta}{\sin J} = \pm \Omega,$$

und folglich nach 74)

$$\frac{\sin \delta}{\sin J} = \pm \frac{\sin \delta}{\sin h} \{ \cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i \}.$$

Für $i = 0$ ist also

$$\frac{\sin h}{\sin J} = \pm 1.$$

Offenbar ist aber in diesem Falle

$$\frac{\sin h}{\sin J} = + 1,$$

und daher, weil bei den Beobachtungen, wenn wir jetzt annehmen, dass man das Coordinatensystem der $x_3 y_3 z_3$ auf die zweite der beiden oben angegebenen Arten genommen hat, i wenigstens der Null immer sehr nahe kommen wird, nach dem Obigen

$$75) \frac{\sin \delta}{\sin J} = \Omega$$

und

$$76) \frac{\sin h}{\sin J} = \cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i$$

oder

$$77) \sin h = \sin J \{ \cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i \}.$$

Nach 69) ist

$$78) \quad \text{tang}(\Theta - \omega) = \frac{F}{G}.$$

Setzen wir nun

$$79) \quad \begin{cases} F' = \frac{\sin i - (A \sin w' + B \cos w') \cos i}{\cos i + (A \sin w' + B \cos w') \sin i}, \\ G' = \frac{A \cos w' - B \sin w'}{\cos i + (A \sin w' + B \cos w') \sin i}; \end{cases}$$

und bezeichnen das entsprechende Azimuth durch ω , so ist

$$80) \quad \text{tang}(\Theta - \omega') = \frac{F'}{G'}.$$

Weil nun

$$\text{tang}(\omega - \omega') = \text{tang}\{(\Theta - \omega') - (\Theta - \omega)\},$$

also

$$\text{tang}(\omega - \omega') = \frac{\text{tang}(\Theta - \omega') - \text{tang}(\Theta - \omega)}{1 + \text{tang}(\Theta - \omega') \text{tang}(\Theta - \omega)}$$

ist, so ist nach dem Vorhergehenden

$$81) \quad \text{tang}(\omega - \omega') = -\frac{FG' - GF'}{FF' + GG'}.$$

Nach dem Obigen ist, wenn man der Kürze wegen

$$R = \{\cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i\} \\ \times \{\cos i + (A \sin w' + B \cos w') \sin i\}$$

setzt,

$$\begin{aligned} & R(FG' - GF') \\ &= \{\sin i - (A \sin w + B \cos w) \cos i\} (A \cos w' - B \sin w') \\ &\quad - \{\sin i - (A \sin w' + B \cos w') \cos i\} (A \cos w - B \sin w) \\ &= -\sin i \{A(\cos w - \cos w') - B(\sin w - \sin w')\} \\ &\quad - \cos i \left\{ \frac{(A \sin w + B \cos w)(A \cos w' - B \sin w')}{-(A \sin w' + B \cos w')(A \cos w - B \sin w)} \right\} \\ &= 2 \sin i \sin \frac{1}{2}(w - w') \{A \sin \frac{1}{2}(w + w') + B \cos \frac{1}{2}(w + w')\} \\ &\quad - \cos i \sin(w - w') \cdot (A^2 + B^2), \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & R(FF' + GG') \\ &= \{\sin i - (A \sin w + B \cos w) \cos i\} \{\sin i - (A \sin w' + B \cos w') \cos i\} \\ &\quad + (A \cos w - B \sin w)(A \cos w' - B \sin w') \\ &= \sin i^2 \\ &\quad - \sin i \cos i \{A(\sin w + \sin w') + B(\cos w + \cos w')\} \\ &\quad + \cos i^2 (A \sin w + B \cos w)(A \sin w' + B \cos w') \\ &\quad + (A \cos w - B \sin w)(A \cos w' - B \sin w') \\ &= (A \sin w + B \cos w)(A \sin w' + B \cos w') \\ &\quad + (A \cos w - B \sin w)(A \cos w' - B \sin w') \\ &\quad - \sin i \cos i \{A(\sin w + \sin w') + B(\cos w + \cos w')\} \\ &\quad + \sin i^2 \{1 - (A \sin w + B \cos w)(A \sin w' + B \cos w')\} \\ &= \cos(w - w') \cdot (A^2 + B^2) \\ &\quad - \sin 2i \cos \frac{1}{2}(w - w') \{A \sin \frac{1}{2}(w + w') + B \cos \frac{1}{2}(w + w')\} \\ &\quad + \sin i^2 \{1 - (A \sin w + B \cos w)(A \sin w' + B \cos w')\}. \end{aligned}$$

Setzt man nun der Kürze wegen

$$82) \begin{cases} P = \sin(w - w') \\ \quad - 2 \operatorname{tang} i \sin \frac{1}{2}(w - w') \frac{A \sin \frac{1}{2}(w + w') B \cos \frac{1}{2}(w + w')}{A^2 + B^2}; \\ Q = \cos(w - w') \\ \quad - \sin 2i \cos \frac{1}{2}(w - w') \frac{A \sin \frac{1}{2}(w + w') + B \cos \frac{1}{2}(w + w')}{A^2 + B^2} \\ \quad + \sin i^2 \frac{1 - (A \sin w + B \cos w)(A \sin w' + B \cos w')}{A^2 + B^2}; \end{cases}$$

so ist

$$\begin{aligned} R(FG' - GF') &= -(A^2 + B^2) P \cos i, \\ R(FF' + GG') &= (A^2 + B^2) Q; \end{aligned}$$

folglich

$$\frac{FG' - GF'}{FF' + GG'} = -\frac{P}{Q} \cos i;$$

also nach 81)

$$83) \operatorname{tang}(\omega - \omega') = \frac{P}{Q} \cos i.$$

Mit Vernachlässigung von Gliedern, welche in Beziehung auf i von der zweiten Ordnung sind, kann man auch

$$84) \begin{cases} P' = \sin(w - w') \\ \quad - 2 \operatorname{tang} i \sin \frac{1}{2}(w - w') \frac{A \sin \frac{1}{2}(w + w') + B \cos \frac{1}{2}(w + w')}{A^2 + B^2}, \\ Q' = \cos(w - w') \\ \quad - \sin 2i \cos \frac{1}{2}(w - w') \frac{A \sin \frac{1}{2}(w + w') + B \cos \frac{1}{2}(w + w')}{A^2 + B^2} \end{cases}$$

setzen, und hat dann näherungsweise

$$85) \operatorname{tang}(\omega - \omega') = \frac{P'}{Q'} \cos i.$$

Nach 75) ist

$$\sin \delta = \Omega \sin J,$$

d. i., wenn man für Ω seinen aus 61) bekannten Werth setzt, wie man leicht findet:

$$\sin \delta = \sin J \sin \varphi \left\{ \cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i \right\} - \sin J \cos \varphi \left\{ \begin{aligned} &(A \cos w - B \sin w) \cos \Theta \\ &-(A \sin w + B \cos w) \sin \Theta \cos i \\ &+ \sin \Theta \sin i \end{aligned} \right\}.$$

Nun ist aber nach 64)

$$\sin J^2 = \frac{1}{1 + A^2 + B^2},$$

also

$$\cos J^2 = \frac{A^2 + B^2}{1 + A^2 + B^2},$$

und folglich

$$\cos J^2 = (A^2 + B^2) \sin J^2$$

oder

$$\cos J = \sin J \sqrt{A^2 + B^2},$$

also

$$\sin J = \frac{\cos J}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Daher ist nach dem Obigen

$$\begin{aligned} \sin \delta = \sin J \sin \varphi \{ & \cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i \} \\ & \left\{ \begin{array}{l} (A \cos w - B \sin w) \cos \Theta \\ - (A \sin w + B \cos w) \sin \Theta \cos i \\ + \sin \Theta \sin i \end{array} \right\} \\ - \cos J \cos \varphi & \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \end{aligned}$$

Setzt man aber

$$86) \quad \tan \mu = \frac{B}{A},$$

so ist

$$\begin{aligned} & A \sin \frac{1}{2}(w + w') + B \cos \frac{1}{2}(w + w') \\ & = A \{ \sin \frac{1}{2}(w + w') + \cos \frac{1}{2}(w + w') \tan \mu \} \\ & = \frac{A}{\cos \mu} \sin \{ \frac{1}{2}(w + w') + \mu \}; \end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned} & A \sin w + B \cos w \\ & = A (\sin w + \cos w \tan \mu) \\ & = \frac{A}{\cos \mu} \sin (w + \mu), \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & A \cos w - B \sin w \\ & = A (\cos w - \sin w \tan \mu) \\ & = \frac{A}{\cos \mu} \cos (w + \mu). \end{aligned}$$

Auch ist, wie man leicht findet

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \pm \frac{A}{\cos \mu},$$

wo das obere oder untere Zeichen genommen werden muss, jenachdem die Grössen A und $\cos \mu$ gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben. Befolgt man aber nur die Regel, dass man, wenn

A positiv, B positiv;
 A negativ, B positiv;
 A negativ, B negativ;
 A positiv, B negativ

ist, respective

$$\begin{aligned}
 0 < \mu < 90^\circ, \\
 90^\circ < \mu < 180^\circ, \\
 180^\circ < \mu < 270^\circ, \\
 370^\circ < \mu < 360^\circ
 \end{aligned}$$

nimmt; so haben die Grössen A und $\cos \mu$ immer gleiche Vorzeichen, und man kann dann allgemein

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \frac{A}{\cos \mu},$$

also nach dem Obigen

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \cot J = \frac{A}{\cos \mu}$$

setzen.

Unter diesen Voraussetzungen ist nach dem Obigen

$$87) \begin{cases} P = \sin(w - w') \\ \quad - 2 \tan i \tan J \sin \frac{1}{2}(w - w') \sin \left\{ \frac{1}{2}(w + w') + \mu \right\}, \\ Q = \cos(w - w') \\ \quad - \sin 2i \tan J \cos \frac{1}{2}(w - w') \sin \left\{ \frac{1}{2}(w + w') + \mu \right\}, \\ \quad - \sin i^2 \{ \tan J^2 - \sin(w + \mu) \sin(w' + \mu) \} \end{cases}$$

und

$$88) \begin{cases} P' = \sin(w - w') \\ \quad - 2 \tan i \tan J \sin \frac{1}{2}(w - w') \sin \left\{ \frac{1}{2}(w + w') + \mu \right\}, \\ Q' = \cos(w - w') \\ \quad - \sin 2i \tan J \cos \frac{1}{2}(w - w') \sin \left\{ \frac{1}{2}(w + w') + \mu \right\}. \end{cases}$$

Ferner ist nach dem Obigen

$$89) \sin \delta = \sin J \sin \varphi \{ \cos i + \cot J \sin(w + \mu) \sin i \}$$

$$\begin{aligned}
 & - \cos J \cos \varphi \left\{ \begin{aligned} & \cos(w + \mu) \cos \Theta \\ & - \sin(w + \mu) \sin \Theta \cos i \\ & + \tan J \sin \Theta \sin i \end{aligned} \right\},
 \end{aligned}$$

oder, wie man leicht findet:

$$90) \sin \delta = \sin J \sin \varphi \left\{ 1 + \cot J \sin(w + \mu) \sin i - 2 \sin \frac{1}{2} i^2 \right. \\
 \left. - \cos J \cos \varphi \left\{ \begin{aligned} & \cos(w + \mu) \cos \Theta \\ & + \tan J \sin \Theta \sin i \\ & + 2 \sin(w + \mu) \sin \Theta \sin \frac{1}{2} i^2 \end{aligned} \right\} \right\};$$

oder auch

$$91) \sin \delta = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos(w + \mu + \Theta) \\
 + \{ \cos J \sin \varphi \sin(w + \mu) - \sin J \cos \varphi \sin \Theta \} \sin i \\
 - 2 \{ \sin J \sin \varphi + \cos J \cos \varphi \sin(w + \mu) \sin \Theta \} \sin \frac{1}{2} i^2.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$92) w + \mu + \Theta = v,$$

so ist

$$93) \sin \delta = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v \\ + \{ \cos J \sin \varphi \sin (v - \Theta) - \sin J \cos \varphi \sin \Theta \} \sin i \\ - 2 \{ \sin J \sin \varphi + \cos J \cos \varphi \sin (v - \Theta) \sin \Theta \} \sin \frac{1}{2} i^2.$$

§. 8.

Für drei bei unverrückter Lage des Fernrohrs beobachtete Sterne, deren Declinationen wie früher $\delta, \delta', \delta''$ sein mögen, haben wir nun nach 93), da $\varphi, J, i, \Theta, \mu$ nach dem Vorhergehenden offenbar für die drei Beobachtungen constante Grössen sind, wenn wir durch w, w', w'' die den drei Beobachtungen entsprechenden Werthe des im Obigen im Allgemeinen durch w bezeichneten Winkels bezeichnen, und

$$v = w + \Theta + \mu,$$

$$v' = w' + \Theta + \mu,$$

$$v'' = w'' + \Theta + \mu$$

gesetzt wird, die drei folgenden in aller Strenge gültigen Gleichungen:

$$\sin \delta = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v \\ + \{ \cos J \sin \varphi \sin (v - \Theta) - \sin J \cos \varphi \sin \Theta \} \sin i \\ - 2 \{ \sin J \sin \varphi + \cos J \cos \varphi \sin (v - \Theta) \sin \Theta \} \sin \frac{1}{2} i^2;$$

$$\sin \delta' = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v' \\ + \{ \cos J \sin \varphi \sin (v' - \Theta) - \sin J \cos \varphi \sin \Theta \} \sin i \\ - 2 \{ \sin J \sin \varphi + \cos J \cos \varphi \sin (v' - \Theta) \sin \Theta \} \sin \frac{1}{2} i^2,$$

$$\sin \delta'' = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v'' \\ + \{ \cos J \sin \varphi \sin (v'' - \Theta) - \sin J \cos \varphi \sin \Theta \} \sin i \\ - 2 \{ \sin J \sin \varphi + \cos J \cos \varphi \sin (v'' - \Theta) \sin \Theta \} \sin \frac{1}{2} i^2.$$

Erinnert man sich an die im Obigen den Symbolen i, Θ, J beigelegte Bedeutung, so wird leicht erhellen, dass dem Beobachter bei Anordnung der Beobachtungen eine im Ganzen freie Disposition über diese Grössen zusteht. Ordnet man nun die Beobachtungen so an, dass die Grössen $\sin i, \sin \Theta, \cos J$ der Null so nahe wie möglich kommen, so kann man, da die absoluten Werthe der Grössen

$$\cos J \sin i, \sin \Theta \sin i, \sin \frac{1}{2} i^2$$

dann kleine Grössen der zweiten Ordnung sind, erst mit Vernachlässigung kleiner Grössen der zweiten Ordnung näherungsweise

$$94) \begin{cases} \sin \delta = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v, \\ \sin \delta' = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v', \\ \sin \delta'' = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v''; \end{cases}$$

also

$$95) \begin{cases} \sin \delta = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v, \\ \sin \delta' = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos \{v + (v' - v)\}, \\ \sin \delta'' = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos \{v + (v'' - v)\}; \end{cases}$$

und folglich, weil nach dem Obigen

$$v' - v = w' - w,$$

$$v'' - v = w'' - w,$$

ist,

$$96) \begin{cases} \sin \delta = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v, \\ \sin \delta' = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos \{v + (w' - w)\}, \\ \sin \delta'' = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos \{v + (w'' - w)\} \end{cases}$$

setzen.

Die Differenzen $w' - w$, $w'' - w$ werden, wie aus der aus dem vorhergehenden Paragraphen bekannten Bedeutung der Winkel w , w' , w'' auf der Stelle von selbst erhellet, unmittelbar aus den auf dem Limbus des Theodoliten gemachten Ablesungen erhalten, und können daher als bekannt betrachtet werden, so dass also die drei vorhergehenden Gleichungen nur die drei unbekannten Grössen J , v , φ enthalten. Um nun die letzte dieser drei Grössen, nämlich die Polhöhe, zu finden, ziehe man die zweite und dritte Gleichung von der ersten ab, so erhält man die beiden Gleichungen:

$$\sin \delta - \sin \delta' = -\cos J \cos \varphi \{\cos v - \cos (v + (w' - w))\},$$

$$\sin \delta - \sin \delta'' = -\cos J \cos \varphi \{\cos v - \cos (v + (w'' - w))\};$$

also nach bekannten goniometrischen Formeln

$$\begin{aligned} & \sin \frac{1}{2}(\delta - \delta') \cos \frac{1}{2}(\delta + \delta') \\ &= \cos J \cos \varphi \sin \frac{1}{2}(w' - w) \sin \{v + \frac{1}{2}(w' - w)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sin \frac{1}{2}(\delta - \delta'') \cos \frac{1}{2}(\delta + \delta'') \\ &= \cos J \cos \varphi \sin \frac{1}{2}(w'' - w) \sin \{v + \frac{1}{2}(w'' - w)\}; \end{aligned}$$

und folglich, wenn man der Kürze wegen

$$97) \begin{cases} \mathfrak{M} = \sin \frac{1}{2}(\delta - \delta') \cos \frac{1}{2}(\delta + \delta') \sin \frac{1}{2}(w'' - w), \\ \mathfrak{N} = \sin \frac{1}{2}(\delta - \delta'') \cos \frac{1}{2}(\delta + \delta'') \sin \frac{1}{2}(w' - w) \end{cases}$$

setzt:

$$98) \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}} = \frac{\sin \{v + \frac{1}{2}(w' - w)\}}{\sin \{v + \frac{1}{2}(w'' - w)\}},$$

woraus man ferner ohne Schwierigkeit

$$\begin{aligned} 99) & \frac{\mathfrak{M} - \mathfrak{N}}{\mathfrak{M} + \mathfrak{N}} \\ &= \tan \frac{1}{4} \{(w' - w) - (w'' - w)\} \cot \{v + \frac{1}{4}(w' - w) + \frac{1}{4}(w'' - w)\} \end{aligned}$$

erhält. Berechnet man aber den Hülfswinkel ζ mittelst der Formel

$$100) \tan \zeta = \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}},$$

so wird

$$\begin{aligned} 101) & \tan \{v + \frac{1}{4}(w' - w) + \frac{1}{4}(w'' - w)\} \\ &= \tan (45^\circ + \zeta) \tan \frac{1}{4} \{(w' - w) - (w'' - w)\}. \end{aligned}$$

Aus den beiden ersten der drei Gleichungen 96) folgt

$$\cos J \cos \varphi = - \frac{\sin \delta - \sin \delta'}{\cos v - \cos \{v + (w' - w)\}},$$

$$\sin J \sin \varphi = - \frac{\sin \delta \cos \{v + (w' - w)\} - \sin \delta' \cos v}{\cos v - \cos \{v + (w' - w)\}};$$

oder

$$102) \begin{cases} \cos J \cos \varphi = - \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta - \delta') \cos \frac{1}{2}(\delta + \delta')}{\sin \frac{1}{2}(w' - w) \sin \{v + \frac{1}{2}(w' - w)\}}, \\ \sin J \sin \varphi = - \frac{\sin \delta \cos \{v + (w' - w)\} - \sin \delta' \cos v}{\sin \frac{1}{2}(w' - w) \sin \{v + \frac{1}{2}(w' - w)\}}. \end{cases}$$

Bezeichnen wir einen der Gleichung 101) genügenden Werth von

$$v + \frac{1}{4}(w' - w) + \frac{1}{4}(w'' - w)$$

durch v_1 , so ist, wenn k eine positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, bekanntlich

$$v + \frac{1}{4}(w' - w) + \frac{1}{4}(w'' - w) = v_1 + k\pi,$$

und folglich

$$103) v = v_1 - \frac{1}{4}(w' - w) - \frac{1}{4}(w'' - w) + k\pi$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$104) u = v_1 - \frac{1}{4}(w' - w) - \frac{1}{4}(w'' - w)$$

setzen:

$$105) v = u + k\pi.$$

Also ist nach 102), wie man leicht findet:

$$106) \begin{cases} \cos J \cos \varphi = - \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta - \delta') \cos \frac{1}{2}(\delta + \delta')}{\sin \frac{1}{2}(w' - w) \sin \{u + \frac{1}{2}(w' - w)\}} \cdot (-1)^k, \\ \sin J \sin \varphi = - \frac{\sin \delta \cos \{u + (w' - w)\} - \sin \delta' \cos u}{\sin \frac{1}{2}(w' - w) \sin \{u + \frac{1}{2}(w' - w)\}}. \end{cases}$$

Weil nun die Grössen

$$\cos J \cos \varphi, \sin J \sin \varphi$$

offenbar immer positiv sind, so ist, wenn wir die absoluten Werthe von

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\delta - \delta') \cos \frac{1}{2}(\delta + \delta')}{\sin \frac{1}{2}(w' - w) \sin \{u + \frac{1}{2}(w' - w)\}},$$

$$\frac{\sin \delta \cos \{u + (w' - w)\} - \sin \delta' \cos u}{\sin \frac{1}{2}(w' - w) \sin \{u + \frac{1}{2}(w' - w)\}}$$

respective durch

$$\mathfrak{R}, \mathfrak{L}$$

bezeichnen, offenbar

$$\cos J \cos \varphi = \mathfrak{R}, \sin J \sin \varphi = \mathfrak{L};$$

also durch Addition und Subtraction

$$107) \begin{cases} \cos(J - \varphi) = R + \varepsilon, \\ \cos(J + \varphi) = R - \varepsilon. \end{cases}$$

Der absolute Werth von $J - \varphi$ übersteigt 90° nicht, und $J + \varphi$ ist nicht grösser als 180° . Bezeichnet also D den absoluten Werth von $J - \varphi$, und S den Werth von $J + \varphi$, so ist

$$J - \varphi = \pm D, \quad J + \varphi = S;$$

also

$$108) \quad J = \frac{1}{2}(S \pm D), \quad \varphi = \frac{1}{2}(S \mp D).$$

Ob man die obern oder die untern Zeichen in diesen Formeln zu nehmen hat, lässt sich nur dadurch entscheiden, dass man sich durch Beobachtung wenigstens einen genäherten Werth von J verschafft, zu welchem Zwecke am besten am Theodoliten, wie dies auch meistens der Fall ist, ein wenn auch nur eine untergeordnete Genauigkeit gewährender Höhenkreis angebracht wird.

Bis jetzt haben wir die Grössen δ , δ' , δ'' und $w' - w$, $w'' - w$ als fehlerfrei betrachtet. Die ersteren können aber wegen der Unrichtigkeit der Sternverzeichnisse, die letzteren wegen der Unrichtigkeit der Theilung des Limbus des Theodoliten und der Ablesung mit Fehlern behaftet sein, und wir wollen daher nun noch untersuchen, welchen Einfluss diese Fehler auf die Bestimmung der Polhöhe ausüben.

Betrachten wir zu dem Ende die Fehler wie gewöhnlich als Differentiale, so haben wir nach dem Obigen eigentlich die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sin(\delta + d\delta) &= \sin(J + dJ) \sin(\varphi + d\varphi) \\ &\quad - \cos(J + dJ) \cos(\varphi + d\varphi) \cos(v + dv), \\ \sin(\delta' + d\delta') &= \sin(J + dJ) \sin(\varphi + d\varphi) \\ &\quad - \cos(J + dJ) \cos(\varphi + d\varphi) \cos\{v + dv + (w' - w) + d(w' - w)\}, \\ \sin(\delta'' + d\delta'') &= \sin(J + dJ) \sin(\varphi + d\varphi) \\ &\quad - \cos(J + dJ) \cos(\varphi + d\varphi) \cos\{v + dv + (w'' - w) + d(w'' - w)\}; \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \sin(\delta + d\delta) &= \sin(J + dJ) \sin(\varphi + d\varphi) \\ &\quad - \cos(J + dJ) \cos(\varphi + d\varphi) \cos(v + dv), \\ \sin(\delta' + d\delta') &= \sin(J + dJ) \sin(\varphi + d\varphi) \\ &\quad - \cos(J + dJ) \cos(\varphi + d\varphi) \cos\{v' + dv + d(w' - w)\}, \\ \sin(\delta'' + d\delta'') &= \sin(J + dJ) \sin(\varphi + d\varphi) \\ &\quad - \cos(J + dJ) \cos(\varphi + d\varphi) \cos\{v'' + dv + d(w'' - w)\}. \end{aligned}$$

Also ist nach den Principien der Differentialrechnung:

$$\begin{aligned} &\sin \delta + \cos \delta d\delta \\ &= \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v \\ &\quad + (\cos J \sin \varphi + \sin J \cos \varphi \cos v) dJ \\ &\quad + (\sin J \cos \varphi + \cos J \sin \varphi \cos v) d\varphi \\ &\quad + \cos J \cos \varphi \sin v dv, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sin \delta' + \cos \delta' d\delta' \\
&= \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v' \\
&\quad + (\cos J \sin \varphi + \sin J \cos \varphi \cos v') dJ \\
&\quad + (\sin J \cos \varphi + \cos J \sin \varphi \cos v') d\varphi \\
&\quad + \cos J \cos \varphi \sin v' \{dv + d(w' - w)\}, \\
&\quad \sin \delta'' + \cos \delta'' d\delta'' \\
&= \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v'' \\
&\quad + (\cos J \sin \varphi + \sin J \cos \varphi \cos v'') dJ \\
&\quad + (\sin J \cos \varphi + \cos J \sin \varphi \cos v'') d\varphi \\
&\quad + \cos J \cos \varphi \sin v'' \{dv + d(w'' - w)\}.
\end{aligned}$$

Weil nun aber nach dem Obigen

$$\begin{aligned}
\sin \delta &= \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v, \\
\sin \delta' &= \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v', \\
\sin \delta'' &= \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v''
\end{aligned}$$

ist, so lassen sich die obigen Gleichungen unter der folgenden einfachern Form darstellen:

$$\begin{aligned}
\cos \delta d\delta &= (\cos J \sin \varphi + \sin J \cos \varphi \cos v) dJ \\
&\quad + (\sin J \cos \varphi + \cos J \sin \varphi \cos v) d\varphi \\
&\quad + \cos J \cos \varphi \sin v dv, \\
\cos \delta' d\delta' &= (\cos J \sin \varphi + \sin J \cos \varphi \cos v') dJ \\
&\quad + (\sin J \cos \varphi + \cos J \sin \varphi \cos v') d\varphi \\
&\quad + \cos J \cos \varphi \sin v' \{dv + d(w' - w)\}, \\
\cos \delta'' d\delta'' &= (\cos J \sin \varphi + \sin J \cos \varphi \cos v'') dJ \\
&\quad + (\sin J \cos \varphi + \cos J \sin \varphi \cos v'') d\varphi \\
&\quad + \cos J \cos \varphi \sin v'' \{dv + d(w'' - w)\};
\end{aligned}$$

oder, wie sich aus diesen Gleichungen sogleich ergibt:

$$\begin{aligned}
\cos \delta d\delta &= (\cos J \sin \varphi + \sin J \cos \varphi \cos v) dJ \\
&\quad + \cos J \cos \varphi \sin v dv \\
&\quad + (\sin J \cos \varphi + \cos J \sin \varphi \cos v) d\varphi, \\
\cos \delta' d\delta' - \sin J \cos \varphi \sin v' d(w' - w) &= (\cos J \sin \varphi + \sin J \cos \varphi \cos v') dJ \\
&\quad + \cos J \cos \varphi \sin v' dv \\
&\quad + (\sin J \cos \varphi + \cos J \sin \varphi \cos v') d\varphi, \\
\cos \delta'' d\delta'' - \sin J \cos \varphi \sin v'' d(w'' - w) &= (\cos J \sin \varphi + \sin J \cos \varphi \cos v'') dJ \\
&\quad + \cos J \cos \varphi \sin v'' dv \\
&\quad + (\sin J \cos \varphi + \cos J \sin \varphi \cos v'') d\varphi.
\end{aligned}$$

Der Kürze wegen wollen wir diese drei Gleichungen durch

$$\begin{aligned}
A &= adJ + b dv + c d\varphi, \\
A' &= a' dJ + b' dv + c' d\varphi, \\
A'' &= a'' dJ + b'' dv + c'' d\varphi
\end{aligned}$$

bezeichnen, wo die Bedeutung der Symbole

und A, A', A''

$$a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''$$

von selbst erhellet.

Durch Elimination von dv erhalten wir die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} Ab' - A'b &= (ab' - a'b) dJ + (cb' - c'b) d\varphi, \\ Ab'' - A''b &= (ab'' - a''b) dJ + (cb'' - c''b) d\varphi. \end{aligned}$$

Nun ist aber, wie man mit Hülfe einiger bekannten goniometrischen Relationen leicht findet:

$$\begin{aligned} ab' - a'b &= \\ &- 2 \cos J \cos \varphi \sin \frac{1}{2}(v - v') \left\{ \begin{aligned} &\cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(v + v') \\ &+ \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(v - v') \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} cb' - c'b &= \\ &- 2 \cos J \cos \varphi \sin \frac{1}{2}(v - v') \left\{ \begin{aligned} &\sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(v + v') \\ &+ \cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(v - v') \end{aligned} \right\}, \end{aligned}$$

so wie auf ähnliche Art

$$\begin{aligned} ab'' - a''b &= \\ &- 2 \cos J \cos \varphi \sin \frac{1}{2}(v - v'') \left\{ \begin{aligned} &\cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(v + v'') \\ &+ \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(v - v'') \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} cb'' - c''b &= \\ &- 2 \cos J \cos \varphi \sin \frac{1}{2}(v - v'') \left\{ \begin{aligned} &\sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(v + v'') \\ &+ \cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(v - v'') \end{aligned} \right\}; \end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned} Ab' - A'b &= (A \sin v' - A' \sin v) \cos J \cos \varphi, \\ Ab'' - A''b &= (A \sin v'' - A'' \sin v) \cos J \cos \varphi. \end{aligned}$$

Also hat man nach dem Obigen die beiden folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} &= \frac{A \sin v' - A' \sin v}{2 \sin \frac{1}{2}(v - v')} \\ &= \{ \cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(v + v') + \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(v - v') \} dJ \\ &+ \{ \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(v + v') + \cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(v - v') \} d\varphi, \\ &= \frac{A \sin v'' - A'' \sin v}{2 \sin \frac{1}{2}(v - v'')} \\ &= \{ \cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(v + v'') + \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(v - v'') \} dJ \\ &+ \{ \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(v + v'') + \cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(v - v'') \} d\varphi. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir nun diese beiden Gleichungen der Kürze wegen durch

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \alpha dJ + \beta d\varphi, \\ \mathcal{X}' &= \alpha' dJ + \beta' d\varphi; \end{aligned}$$

so ist

$$\mathcal{X}\alpha' - \mathcal{X}'\alpha = -(\alpha\beta' - \alpha'\beta) d\varphi.$$

Ohne Schwierigkeit findet man aber mit Hülfe bekannter goniometrischer Relationen

und

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = \sin v \sin(J - \varphi) \sin(J + \varphi) \sin \frac{1}{2}(v' - v'')$$

$$2(\mathcal{A}\alpha' - \mathcal{A}'\alpha) \frac{\sin \frac{1}{2}(v - v') \sin \frac{1}{2}(v'' - v)}{\sin v}$$

$$= A \sin \frac{1}{2}(v' - v'') \left\{ \begin{array}{l} \cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(v' + v'') \\ + \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(v' - v'') \end{array} \right\}$$

$$+ A' \sin \frac{1}{2}(v'' - v) \left\{ \begin{array}{l} \cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(v'' + v) \\ + \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(v'' - v) \end{array} \right\}$$

$$+ A'' \sin \frac{1}{2}(v - v') \left\{ \begin{array}{l} \cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(v + v') \\ + \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(v - v') \end{array} \right\}.$$

Also ist nach dem Obigen

$$109) \quad d\varphi =$$

$$\begin{aligned} & - \frac{\cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(v' + v'') + \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(v' - v'')}{2 \sin(J - \varphi) \sin(J + \varphi) \sin \frac{1}{2}(v - v') \sin \frac{1}{2}(v'' - v)} A \\ & - \frac{\cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(v'' + v) + \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(v'' - v)}{2 \sin(J - \varphi) \sin(J + \varphi) \sin \frac{1}{2}(v' - v'') \sin \frac{1}{2}(v - v')} A' \\ & - \frac{\cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(v + v') + \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(v - v')}{2 \sin(J - \varphi) \sin(J + \varphi) \sin \frac{1}{2}(v'' - v) \sin \frac{1}{2}(v' - v'')} A'' \end{aligned}$$

oder nach dem Obigen

$$110) \quad d\varphi =$$

$$\begin{aligned} & - \frac{\cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(v' + v'') + \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(v' - v'')}{2 \sin(J - \varphi) \sin(J + \varphi) \sin \frac{1}{2}(w - w') \sin \frac{1}{2}(w'' - w)} A \\ & - \frac{\cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(v'' + v) + \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(v'' - v)}{2 \sin(J - \varphi) \sin(J + \varphi) \sin \frac{1}{2}(w' - w'') \sin \frac{1}{2}(w - w')} A' \\ & - \frac{\cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(v + v') + \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(v - v')}{2 \sin(J - \varphi) \sin(J + \varphi) \sin \frac{1}{2}(w'' - w) \sin \frac{1}{2}(w' - w'')} A'', \end{aligned}$$

wo nach dem Obigen

$$111) \quad \begin{cases} A = \cos \delta d\delta, \\ A' = \cos \delta' d\delta' - \sin J \cos \varphi \sin v' d(w' - w), \\ A'' = \cos \delta'' d\delta'' - \sin J \cos \varphi \sin v'' d(w'' - w) \end{cases}$$

ist.

§. 9.

Aus den sämtlichen im vorhergehenden Paragraphen angestellten Untersuchungen lassen sich nun die folgenden für die praktische Anwendung unserer Methode, die Polhöhe zu bestimmen, jedenfalls sehr wichtigen Resultate ziehen.

1. Zuvörderst wissen wir aus dem vorhergehenden Paragraphen, dass $\sin \Theta$ der Null möglichst nahe kommen muss. Nun ist aber Θ der von dem positiven Theile der Axe der x_2 , welche die Durchschnittslinie der Ebene des Limbus des

Theodoliten mit der Ebene des Horizonts ist, mit dem positiven Theile der Axe der x , welche die Mittagslinie ist, eingeschlossene, von dem positiven Theile der Axe der x an durch den rechten Winkel (xy) hindurch von 0 bis 360° gezählte Winkel, und es muss also die Durchschnittslinie der Ebene des Limbus des Theodoliten mit der Ebene des Horizonts möglichst nahe mit der Mittagslinie zusammenfallen. Bei der Horizontalstellung des Limbus des Theodoliten stellt man bekanntlich das Niveau zuerst parallel mit der durch die Köpfe zweier Fusschrauben des Theodoliten gehenden geraden Linie, und dann senkrecht gegen dieselbe Linie. Daher wird man, um die Durchschnittslinie der Ebene des Limbus des Theodoliten mit der Ebene des Horizonts möglichst nahe mit der Mittagslinie zusammenfallend zu machen, vor der Horizontalstellung des Limbus jederzeit den Theodoliten so aufzustellen haben, dass die durch die Köpfe zweier Fusschrauben gehende gerade Linie, mit welcher man bei der Horizontalstellung des Limbus das Niveau parallel zu stellen beabsichtigt, mit der Mittagslinie möglichst nahe zusammenfällt, oder von Süden nach Norden gerichtet ist.

2. Nach dem vorhergehenden Paragraphen muss ferner $\sin i$ der Null möglichst nahe kommen, und auf die Erfüllung dieser Bedingung ist, wie sich aus der im vorhergehenden Paragraphen angestellten Untersuchung auf die unzweideutigste Weise ergibt, jedenfalls eine ganz vorzügliche Sorgfalt zu verwenden. Da nun bekanntlich i der 90° nicht übersteigende, positiv oder negativ genommene Neigungswinkel der Ebene des Limbus des Theodoliten gegen die Ebene des Horizonts ist, so muss man die Ebene des Limbus des Theodoliten mit aller nur möglichen Sorgfalt horizontal stellen, und ein sehr gutes Niveau ist daher jedenfalls als ein Haupterforderniss bei der Anwendung unserer Methode zur Bestimmung der Polhöhe zu betrachten, wie sich dies auch gleich nachher noch weiter herausstellen wird. Hierbei bemerken wir aber zugleich auch noch, dass, wie sich aus den im vorhergehenden Paragraphen angestellten Entwicklungen von selbst ergibt, die übrigen gewöhnlichen Berichtigungen des Theodoliten — die Horizontalstellung der Drehungsaxe des Fernrohrs, die Berichtigung der Visirlinie des Fernrohrs — als für unsere Methode zur Bestimmung der Polhöhe ganz unwesentliche Erfordernisse zu betrachten sind, indem es nach dem vorhergehenden Paragraphen bei der Anwendung dieser Methode offenbar bloss darauf ankommt, dass die Lage der Visirlinie gegen die Ebene des Limbus des Theodoliten für alle drei Beobachtungen als constant betrachtet werden kann, weshalb es jedenfalls bei der Anwendung dieser Methode auch als eine nicht zu übersehende Rücksicht angesehen werden muss,

dass man eine solche Auswahl der drei Sterne trifft, dass dieselben in möglichst kurzen Zeitintervallen gleiche Höhen über dem Horizonte erreichen.

3. Aus den im vorhergehenden Paragraphen zu Tage liegenden Gründen muss auch $\cos J$ der Null möglichst nahe kommen, also J , nämlich der 90° nicht übersteigende Neigungswinkel der Visirlinie gegen die Ebene des Limbus des Theodoliten, möglichst nahe 90° betragen, oder die Visirlinie möglichst genau nach dem Zenith gerichtet sein, was aber sogleich durch das Folgende eine wesentliche Modification erleiden wird.

4. Aus den Gleichungen 110) und 111) ergibt sich nämlich auf der Stelle, dass die aus der Ungenauigkeit der Theilung des Limbus und aus Fehlern der Ablesung entspringenden Fehler $d(w' - w)$ und $d(w'' - w)$ im Allgemeinen einen desto grössern Einfluss auf die Bestimmung der Polhöhe ausüben, je grösser $\sin J$ ist, d. h. je näher J einem rechten Winkel oder 90° kommt, und dass dieser Einfluss sich vermindert, wenn J abnimmt. Da nun Fehler der Theilung und Fehler der Ablesung bei jedem winkelmessenden Instrumente zu den am meisten zu fürchtenden Fehlern gehören, und auf der andern Seite das Glied

$$\cos J \sin \varphi \sin (v - \Theta) \sin i$$

der Gleichung 93), welches uns im vorhergehenden Paragraphen zu der in 3. gegebenen Bestimmung führte, wenn man sich nur auf das Niveau verlassen kann, was auch J sein mag, immer wird der Null äusserst nahe gebracht werden können; so wird man offenbar die in 3. gegebene Regel in der Praxis grösstentheils aufzugeben haben, und sich vielmehr der aus dem unmittelbar Vorhergehenden von selbst fließenden Regel näher anzuschliessen suchen müssen. Auf's Neue ergibt sich aber hieraus auch, wie ungemein wichtig es bei der Anwendung unserer Methode ist, dass man für eine sehr genaue Horizontalstellung des Limbus des Theodoliten Sorge trägt, und daher auch bei der Auswahl des Instruments auf Vollkommenheit des Niveaus ganz besonders sein Augenmerk richtet, ohne dass man übrigens natürlich auf Feinheit und Genauigkeit der Theilung, und Vollkommenheit der eine scharfe Ablesung bezweckenden Hilfsmittel weniger zu sehen hat.

5. Endlich ergibt sich aus den Gleichungen 110) und 111), dass man, um sich in allen Fällen vor einem zu grossen Einfluss der Fehler $d\delta$, $d\delta'$, $d\delta''$ und $d(w' - w)$, $d(w'' - w)$ auf die Bestimmung der Polhöhe sicher zu stellen, bei der Auswahl der Sterne ganz vorzüglich darauf zu sehen hat, dass keins der drei Producte

$$\begin{aligned} & 2 \sin(J - \varphi) \sin(J + \varphi) \sin \frac{1}{2}(w - w') \sin \frac{1}{2}(w'' - w), \\ & 2 \sin(J - \varphi) \sin(J + \varphi) \sin \frac{1}{2}(w' - w'') \sin \frac{1}{2}(w - w'), \\ & 2 \sin(J - \varphi) \sin(J + \varphi) \sin \frac{1}{2}(w'' - w) \sin \frac{1}{2}(w' - w'') \end{aligned}$$

der Null sehr nahe kommt, sondern vielmehr ein jedes dieser drei Producte einen möglichst grossen absoluten Werth erhält, wozu eine vorläufige genäherte Kenntniss von J , φ und $w - w'$, $w' - w''$, $w'' - w$ erforderlich ist, die man sich gewiss jederzeit, so weit dieselbe zur Erreichung des vorher näher bezeichneten Zwecks nöthig ist, mit Leichtigkeit zu verschaffen im Stande sein wird.

§. 10.

Indem wir jetzt wieder annehmen, dass das Azimuth ω , die Höhe h , die Polhöhe φ und dann ferner auch die Stundenwinkel σ , σ' , σ'' mittelst der aus §. 4. bekannten Gleichungen

$$112) \begin{cases} \sin \delta = \sin h \sin \varphi - \cos \omega \cos h \cos \varphi, \\ \sin \delta' = \sin h \sin \varphi - \cos \{\omega + (\omega' - \omega)\} \cos h \cos \varphi, \\ \sin \delta'' = \sin h \sin \varphi - \cos \{\omega + (\omega'' - \omega)\} \cos h \cos \varphi \end{cases}$$

bestimmt worden sind, wollen wir nun noch im Allgemeinen untersuchen, welchen Einfluss Fehler der Declinationen, Fehler der Azimuthaldifferenzen und die nicht völlige Gleichheit der Höhen, in denen die drei Sterne beobachtet worden sind, auf die vorher näher bezeichneten Grössen ausüben.

Zu dem Ende wollen wir, indem immer ω , h , φ als den drei Gleichungen 112) genügend angenommen werden, und dann ferner σ , σ' , σ'' als aus diesen Grössen mittelst bekannter Formeln bestimmt betrachtet werden, die wahren Declinationen der drei Sterne durch

$$\delta + d\delta, \delta' + d\delta', \delta'' + d\delta'';$$

die wahren Azimuthaldifferenzen durch

$$\omega' - \omega + d(\omega' - \omega), \omega'' - \omega + d(\omega'' - \omega);$$

die wahren Höhen, in denen die drei Sterne beobachtet worden sind, durch

$$h + \Delta h, h + \Delta h + dh, h + \Delta h + d_1 h;$$

die wahren Azimuthe und die wahren Stundenwinkel der drei Sterne durch

$$\begin{aligned} & \omega + \Delta\omega, \sigma + \Delta\sigma; \\ & \omega' + \Delta\omega', \sigma' + \Delta\sigma'; \\ & \omega'' + \Delta\omega'', \sigma'' + \Delta\sigma''; \end{aligned}$$

endlich die wahre Polhöhe durch

$$\varphi + \Delta\varphi$$

bezeichnen. Dann haben wir nach dem Obigen die drei folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 & \sin(\delta + d\delta) \\
 = & \sin(h + \Delta h) \sin(\varphi + \Delta\varphi) \\
 & - \cos(\omega + \Delta\omega) \cos(h + \Delta h) \cos(\varphi + \Delta\varphi), \\
 & \sin(\delta' + d\delta') \\
 = & \sin(h + \Delta h + dh) \sin(\varphi + \Delta\varphi) \\
 & - \cos\{\omega + \Delta\omega + (\omega' - \omega) + d(\omega' - \omega)\} \cos(h + \Delta h + dh) \cos(\varphi + \Delta\varphi), \\
 & \sin(\delta'' + d\delta'') \\
 = & \sin(h + \Delta h + d_1 h) \sin(\varphi + \Delta\varphi) \\
 & - \cos\{\omega + \Delta\omega + (\omega'' - \omega) + d(\omega'' - \omega)\} \cos(h + \Delta h + d_1 h) \cos(\varphi + \Delta\varphi);
 \end{aligned}$$

oder kürzer

$$\begin{aligned}
 & \sin(\delta + d\delta) \\
 = & \sin(h + \Delta h) \sin(\varphi + \Delta\varphi) \\
 & - \cos(\omega + \Delta\omega) \cos(h + \Delta h) \cos(\varphi + \Delta\varphi), \\
 & \sin(\delta' + d\delta') \\
 = & \sin(h + \Delta h + dh) \sin(\varphi + \Delta\varphi) \\
 & - \cos\{\omega' + \Delta\omega + d(\omega' - \omega)\} \cos(h + \Delta h + dh) \cos(\varphi + \Delta\varphi), \\
 & \sin(\delta'' + d\delta'') \\
 = & \sin(h + \Delta h + d_1 h) \sin(\varphi + \Delta\varphi) \\
 & - \{\cos\omega'' + \Delta\omega + d(\omega'' - \omega)\} \cos(h + \Delta h + d_1 h) \cos(\varphi + \Delta\varphi).
 \end{aligned}$$

Betrachtet man nun aber alle Fehler als Differentiale, wie es wegen der Kleinheit der absoluten Werthe derselben mit hinreichender Annäherung verstattet sein wird, so erhalten die vorhergehenden Gleichungen die folgende Form:

$$\begin{aligned}
 & \sin \delta + \cos \delta d\delta \\
 = & \sin h \sin \varphi - \cos \omega \cos h \cos \varphi \\
 & + (\cos h \sin \varphi + \cos \omega \sin h \cos \varphi) \Delta h \\
 & + \sin \omega \cos h \cos \varphi \Delta \omega \\
 & + (\sin h \cos \varphi + \cos \omega \cos h \sin \varphi) \Delta \varphi, \\
 & \sin \delta' + \cos \delta' d\delta' \\
 = & (\cos h \sin \varphi + \cos \omega' \sin h \cos \varphi) dh \\
 & - \sin \omega' \cos h \cos \varphi d(\omega' - \omega) \\
 = & \sin h \sin \varphi - \cos \omega' \cos h \cos \varphi \\
 & + (\cos h \sin \varphi + \cos \omega' \sin h \cos \varphi) \Delta h \\
 & + \sin \omega' \cos h \cos \varphi \Delta \omega \\
 & + (\sin h \cos \varphi + \cos \omega' \cos h \sin \varphi) \Delta \varphi \\
 & \sin \delta'' + \cos \delta'' d\delta'' \\
 = & (\cos h \sin \varphi + \cos \omega'' \sin h \cos \varphi) d_1 h \\
 & - \sin \omega'' \cos h \cos \varphi d(\omega'' - \omega) \\
 = & \sin h \sin \varphi - \cos \omega'' \cos h \cos \varphi \\
 & + (\cos h \sin \varphi + \cos \omega'' \sin h \cos \varphi) \Delta h \\
 & + \sin \omega'' \cos h \cos \varphi \Delta \omega \\
 & + (\sin h \cos \varphi + \cos \omega'' \cos h \sin \varphi) \Delta \varphi;
 \end{aligned}$$

also, weil nach 112)

$$\sin \delta = \sin h \sin \varphi - \cos \omega \cos h \cos \varphi,$$

$$\sin \delta = \sin h \sin \varphi - \cos \omega' \cos h \cos \varphi,$$

$$\sin \delta' = \sin h \sin \varphi - \cos \omega'' \cos h \cos \varphi$$

ist

$$\cos \delta d\delta = (\cos h \sin \varphi + \cos \omega \sin h \cos \varphi) \Delta h$$

$$+ \sin \omega \cos h \cos \varphi \Delta \omega$$

$$+ (\sin h \cos \varphi + \cos \omega \cos h \sin \varphi) \Delta \varphi,$$

$$\cos \delta' d\delta' = (\cos h \sin \varphi + \cos \omega' \sin h \cos \varphi) \Delta h$$

$$- \sin \omega' \cos h \cos \varphi d(\omega' - \omega)$$

$$= (\cos h \sin \varphi + \cos \omega' \sin h \cos \varphi) \Delta h$$

$$+ \sin \omega' \cos h \cos \varphi \Delta \omega$$

$$+ (\sin h \cos \varphi + \cos \omega' \cos h \sin \varphi) \Delta \varphi,$$

$$\cos \delta'' d\delta'' = (\cos h \sin \varphi + \cos \omega'' \sin h \cos \varphi) \Delta h$$

$$- \sin \omega'' \cos h \cos \varphi d(\omega'' - \omega)$$

$$= (\cos h \sin \varphi + \cos \omega'' \sin h \cos \varphi) \Delta h$$

$$+ \sin \omega'' \cos h \cos \varphi \Delta \omega$$

$$+ (\sin h \cos \varphi + \cos \omega'' \cos h \sin \varphi) \Delta \varphi;$$

oder der Kürze wegen

$$A = a\Delta h + b\Delta \omega + c\Delta \varphi,$$

$$A' = a'\Delta h + b'\Delta \omega + c'\Delta \varphi,$$

$$A'' = a''\Delta h + b''\Delta \omega + c''\Delta \varphi;$$

wo

$$113) \begin{cases} A = \cos \delta d\delta, \\ A' = \cos \delta' d\delta' \\ \quad - (\cos h \sin \varphi + \cos \omega' \sin h \cos \varphi) \Delta h \\ \quad - \sin \omega' \cos h \cos \varphi d(\omega' - \omega), \\ A'' = \cos \delta'' d\delta'' \\ \quad - (\cos h \sin \varphi + \cos \omega'' \sin h \cos \varphi) \Delta h \\ \quad - \sin \omega'' \cos h \cos \varphi d(\omega'' - \omega) \end{cases}$$

ist, und die Bedeutung der Symbole

$$a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''$$

von selbst erhellet.

Durch Elimination von $\Delta \omega$ erhält man

$$Ab' - A'b = (ab' - a'b) \Delta h + (cb' - c'b) \Delta \varphi,$$

$$Ab'' - A''b = (ab'' - a''b) \Delta h + (cb'' - c''b) \Delta \varphi;$$

also, wie man auf ganz ähnliche Art wie in §. 8. findet:

$$\begin{aligned} & \frac{A \sin \omega' \pm A' \sin \omega}{2 \sin \frac{1}{2} (\omega - \omega')} \\ &= \{ \cos h \sin \varphi \cos \frac{1}{2} (\omega + \omega') + \sin h \cos \varphi \cos \frac{1}{2} (\omega - \omega') \} \Delta h \\ &+ \{ \sin h \cos \varphi \cos \frac{1}{2} (\omega + \omega') + \cos h \sin \varphi \cos \frac{1}{2} (\omega - \omega') \} \Delta \varphi, \end{aligned}$$

$$= \frac{A \sin \omega'' - A'' \sin \omega}{2 \sin \frac{1}{2}(\omega - \omega'')} \\ = \{ \cos h \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(\omega + \omega'') + \sin h \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(\omega - \omega'') \} \Delta h \\ + \{ \sin h \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(\omega + \omega'') + \cos h \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(\omega - \omega'') \} \Delta \varphi;$$

und hieraus ergibt sich dann weiter auf ganz ähnliche Art wie in §. 8.

$$114) \Delta \varphi = \\ - \frac{\cos h \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(\omega' + \omega'') + \sin h \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(\omega' - \omega'')}{2 \sin(h - \varphi) \sin(h + \varphi) \sin \frac{1}{2}(\omega - \omega') \sin \frac{1}{2}(\omega'' - \omega)} A \\ - \frac{\cos h \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(\omega'' + \omega) + \sin h \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(\omega'' - \omega)}{2 \sin(h - \varphi) \sin(h + \varphi) \sin \frac{1}{2}(\omega' - \omega'') \sin \frac{1}{2}(\omega - \omega')} A' \\ - \frac{\cos h \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(\omega + \omega') + \sin h \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(\omega - \omega')}{2 \sin(h - \varphi) \sin(h + \varphi) \sin \frac{1}{2}(\omega'' - \omega) \sin \frac{1}{2}(\omega' - \omega'')} A''$$

oder der Kürze wegen

$$115) \Delta \varphi = EA + E'A' + E''A'';$$

und

$$116) \Delta h = \\ \frac{\sin h \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(\omega' + \omega'') + \cos h \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(\omega' - \omega'')}{2 \sin(h - \varphi) \sin(h + \varphi) \sin \frac{1}{2}(\omega - \omega') \sin \frac{1}{2}(\omega'' - \omega)} A \\ + \frac{\sin h \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(\omega'' + \omega) + \cos h \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(\omega'' - \omega)}{2 \sin(h - \varphi) \sin(h + \varphi) \sin \frac{1}{2}(\omega' - \omega'') \sin \frac{1}{2}(\omega - \omega')} A' \\ + \frac{\sin h \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(\omega + \omega') + \cos h \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(\omega - \omega')}{2 \sin(h - \varphi) \sin(h + \varphi) \sin \frac{1}{2}(\omega'' - \omega) \sin \frac{1}{2}(\omega' - \omega'')} A''$$

oder der Kürze wegen

$$117) \Delta h = E_1 A + E'_1 A' + E''_1 A''.$$

Nach dem Obigen haben wir nun ferner die drei Gleichungen

$$b \Delta \omega = A - a \Delta h - c \Delta \varphi, \\ b' \Delta \omega = A' - a' \Delta h - c' \Delta \varphi, \\ b'' \Delta \omega = A'' - a'' \Delta h - c'' \Delta \varphi;$$

aus denen sich, wenn man sie nach der Reihe mit λ , λ' , λ'' multiplicirt und dann zu einander addirt, die Gleichung

$$(b\lambda + b'\lambda' + b''\lambda'') \Delta \omega = A\lambda + A'\lambda' + A''\lambda''$$

$$- (a\lambda + a'\lambda' + a''\lambda'') \Delta h$$

$$- (c\lambda + c'\lambda' + c''\lambda'') \Delta \varphi$$

ergiebt. Bestimmt man nun die Factoren λ , λ' , λ'' so, dass den beiden Gleichungen

$$a\lambda + a'\lambda' + a''\lambda'' = 0,$$

$$c\lambda + c'\lambda' + c''\lambda'' = 0$$

genügt wird, so ist

$$\Delta \omega = \frac{A\lambda + A'\lambda' + A''\lambda''}{b\lambda + b'\lambda' + b''\lambda''}$$

Aus den beiden vorhergehenden Gleichungen ergibt sich aber

$$\begin{cases} a + a' \frac{\lambda'}{\lambda} + a'' \frac{\lambda''}{\lambda} = 0, \\ c + c' \frac{\lambda'}{\lambda} + c'' \frac{\lambda''}{\lambda} = 0; \end{cases}$$

also, wie man leicht findet,

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{a''c - ac''}{a'c - a''c'},$$

$$\frac{\lambda''}{\lambda} = \frac{a'c' - a''c}{a'c - a''c'}.$$

Daher kann man

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{a'c'' - a''c'}{a'c - a''c'}, \\ \lambda' &= a'c - a''c', \\ \lambda'' &= ac' - a'c \end{aligned}$$

setzen. Weil nun nach dem Obigen

$$a = \cosh h \sin \varphi + \cos \omega \sin h \cos \varphi,$$

$$a' = \cosh h \sin \varphi + \cos \omega' \sin h \cos \varphi,$$

$$a'' = \cosh h \sin \varphi + \cos \omega'' \sin h \cos \varphi$$

und

$$c = \sin h \cos \varphi + \cos \omega \cosh h \sin \varphi,$$

$$c' = \sin h \cos \varphi + \cos \omega' \cosh h \sin \varphi,$$

$$c'' = \sin h \cos \varphi + \cos \omega'' \cosh h \sin \varphi$$

ist; so ist, wie man leicht findet:

$$\lambda = \sin(h - \varphi) \sin(h + \varphi) (\cos \omega' - \cos \omega''),$$

$$\lambda' = \sin(h - \varphi) \sin(h + \varphi) (\cos \omega'' - \cos \omega),$$

$$\lambda'' = \sin(h - \varphi) \sin(h + \varphi) (\cos \omega - \cos \omega')$$

oder

$$\lambda = -2 \sin(h - \varphi) \sin(h + \varphi) \sin \frac{1}{2}(\omega' - \omega'') \sin \frac{1}{2}(\omega' + \omega''),$$

$$\lambda' = -2 \sin(h - \varphi) \sin(h + \varphi) \sin \frac{1}{2}(\omega'' - \omega) \sin \frac{1}{2}(\omega'' + \omega),$$

$$\lambda'' = -2 \sin(h - \varphi) \sin(h + \varphi) \sin \frac{1}{2}(\omega - \omega') \sin \frac{1}{2}(\omega + \omega').$$

Weil nun ferner nach dem Obigen

$$b = \sin \omega \cosh h \cos \varphi,$$

$$b' = \sin \omega' \cosh h \cos \varphi,$$

$$b'' = \sin \omega'' \cosh h \cos \varphi$$

ist, so ist

$$b\lambda + b'\lambda' + b''\lambda''$$

$$= \cosh h \cos \varphi \sin(h - \varphi) \sin(h + \varphi) \left\{ \begin{aligned} &\sin \omega \cos \omega' - \cos \omega \sin \omega' \\ &+ \sin \omega' \cos \omega'' - \cos \omega' \sin \omega'' \\ &+ \sin \omega'' \cos \omega - \cos \omega'' \sin \omega \end{aligned} \right\}$$

$$= \cosh h \cos \varphi \sin(h - \varphi) \sin(h + \varphi) \{ \sin(\omega - \omega') + \sin(\omega' - \omega'') + \sin(\omega'' - \omega) \}$$

$$= -4 \cosh h \cos \varphi \sin(h - \varphi) \sin(h + \varphi)$$

$$\times \sin \frac{1}{2}(\omega - \omega') \sin \frac{1}{2}(\omega' - \omega'') \sin \frac{1}{2}(\omega'' - \omega).$$

Auch ist nach dem Obigen

$$A\lambda + A'\lambda' + A''\lambda'' \\ = -2 \sin(h - \varphi) \sin(h + \varphi) \left\{ \begin{aligned} &A \sin \frac{1}{2}(\omega' - \omega'') \sin \frac{1}{2}(\omega' + \omega'') \\ &+ A' \sin \frac{1}{2}(\omega'' - \omega) \sin \frac{1}{2}(\omega'' + \omega) \\ &+ A'' \sin \frac{1}{2}(\omega - \omega') \sin \frac{1}{2}(\omega + \omega') \end{aligned} \right\}.$$

Also ist

$$118) \Delta\omega = \frac{\sin \frac{1}{2}(\omega' + \omega'')}{2 \cosh h \cos \varphi \sin \frac{1}{2}(\omega - \omega') \sin \frac{1}{2}(\omega'' - \omega)} A \\ + \frac{\sin \frac{1}{2}(\omega'' + \omega)}{2 \cosh h \cos \varphi \sin \frac{1}{2}(\omega' - \omega'') \sin \frac{1}{2}(\omega - \omega')} A' \\ + \frac{\sin \frac{1}{2}(\omega + \omega')}{2 \cosh h \cos \varphi \sin \frac{1}{2}(\omega'' - \omega) \sin \frac{1}{2}(\omega' - \omega'')} A'',$$

oder der Kürze wegen

$$119) \Delta\omega = E_2 A + E'_2 A' + E''_2 A'.$$

Aus $\Delta\omega$ findet man $\Delta\omega'$ und $\Delta\omega''$ leicht mittelst der Formeln

$$120) \begin{cases} \Delta\omega' = \Delta\omega + d(\omega' - \omega), \\ \Delta\omega'' = \Delta\omega + d(\omega'' - \omega). \end{cases}$$

Endlich haben wir nach 6) die Gleichungen

$$\sin \sigma \cos \delta = \sin \omega \cosh h,$$

$$\sin \sigma' \cos \delta' = \sin \omega' \cosh h,$$

$$\sin \sigma'' \cos \delta'' = \sin \omega'' \cosh h$$

und

$$\begin{aligned} &\sin(\sigma + \Delta\sigma) \cos(\delta + d\delta) \\ &= \sin(\omega + \Delta\omega) \cosh(h + \Delta h), \\ &\sin(\sigma' + \Delta\sigma') \cos(\delta' + d\delta') \\ &= \sin(\omega' + \Delta\omega') \cosh(h + \Delta h + d_1 h), \\ &\sin(\sigma'' + \Delta\sigma'') \cos(\delta'' + d\delta'') \\ &= \sin(\omega'' + \Delta\omega'') \cosh(h + \Delta h + d_1 h); \end{aligned}$$

aus denen sich nach den Principien der Differentialrechnung sehr leicht die folgenden Ausdrücke von

$$\Delta\sigma, \Delta\sigma', \Delta\sigma''$$

ergeben:

$$\begin{aligned}
 \Delta\sigma &= \text{tang } \sigma \text{ tang } \delta d\delta \\
 &+ \frac{\cos \omega \cos h}{\cos \sigma \cos \delta} \Delta\omega \\
 &- \frac{\sin \omega \sin h}{\cos \sigma \cos \delta} \Delta h, \\
 \Delta\sigma' &= \text{tang } \sigma' \text{ tang } \delta' d\delta' \\
 &+ \frac{\cos \omega' \cos h}{\cos \sigma' \cos \delta'} \Delta\omega' \\
 &- \frac{\sin \omega' \sin h}{\cos \sigma' \cos \delta'} (\Delta h + dh), \\
 \Delta\sigma'' &= \text{tang } \sigma'' \text{ tang } \delta'' d\delta'' \\
 &+ \frac{\cos \omega'' \cos h}{\cos \sigma'' \cos \delta''} \Delta\omega'' \\
 &- \frac{\sin \omega'' \sin h}{\cos \sigma'' \cos \delta''} (\Delta h + d_1 h).
 \end{aligned}
 \tag{121}$$

Führt man nun nur in die sämtlichen vorher entwickelten Formeln die aus 113) bekannten Werthe von A , A' , A'' , ein, so kann man ohne die geringste Schwierigkeit die sämtlichen Fehler

$$\begin{aligned}
 &\Delta\varphi, \Delta h; \\
 &\Delta\omega, \Delta\omega', \Delta\omega''; \\
 &\Delta\sigma, \Delta\sigma', \Delta\sigma''
 \end{aligned}$$

bloss durch

$$d\delta, d\delta', d\delta''; dh, d_1 h; d(\omega' - \omega), d(\omega'' - \omega)$$

ausdrücken; und man sollte in keinem Falle unterlassen, diese Ausdrücke der Fehler

$$\begin{aligned}
 &\Delta\varphi, \Delta h; \\
 &\Delta\omega, \Delta\omega', \Delta\omega''; \\
 &\Delta\sigma, \Delta\sigma', \Delta\sigma''
 \end{aligned}$$

zu entwickeln, weil man sich nur auf diese Weise ein Urtheil über den Grad der erreichten Genauigkeit zu bilden im Stande ist.

Aus den vorhergehenden Formeln lassen sich auch leicht Regeln zur vortheilhaftesten Anordnung der Beobachtungen abstrahiren, worüber jedoch hier weitere Erläuterungen beizubringen wir um so eher unterlassen können, weil schon im vorhergehenden Paragraphen wenigstens in Beziehung auf die Bestimmung der Polhöhe die nöthigen Andeutungen über diesen wichtigen Gegenstand gegeben worden sind.

Die Coefficienten

$$E, E', E''; E_1, E'_1, E''_1;$$

welche nebst den Coefficienten E_2, E'_2, E''_2 bei dieser Entwicklung von besonderer Bedeutung sind, berechnet man am leichtesten auf folgende Art.

Es ist, wie man leicht findet:

$$122) \begin{cases} E + E_1 = - \frac{\sin \frac{1}{2} \omega' \sin \frac{1}{2} \omega''}{\sin(h + \varphi) \sin \frac{1}{2}(\omega - \omega') \sin \frac{1}{2}(\omega'' - \omega)}, \\ E - E_1 = - \frac{\cos \frac{1}{2} \omega' \cos \frac{1}{2} \omega''}{\sin(h - \varphi) \sin \frac{1}{2}(\omega - \omega') \sin \frac{1}{2}(\omega'' - \omega)}; \end{cases}$$

so wie

$$123) \begin{cases} E' + E'_1 = - \frac{\sin \frac{1}{2} \omega'' \sin \frac{1}{2} \omega}{\sin(h + \varphi) \sin \frac{1}{2}(\omega' - \omega'') \sin \frac{1}{2}(\omega - \omega')}, \\ E' - E'_1 = - \frac{\cos \frac{1}{2} \omega'' \cos \frac{1}{2} \omega}{\sin(h - \varphi) \sin \frac{1}{2}(\omega' - \omega'') \sin \frac{1}{2}(\omega - \omega')}; \end{cases}$$

und

$$124) \begin{cases} E'' + E''_1 = - \frac{\sin \frac{1}{2} \omega \sin \frac{1}{2} \omega'}{\sin(h + \varphi) \sin \frac{1}{2}(\omega'' - \omega) \sin \frac{1}{2}(\omega' - \omega'')}, \\ E'' - E''_1 = - \frac{\cos \frac{1}{2} \omega \cos \frac{1}{2} \omega'}{\sin(h - \varphi) \sin \frac{1}{2}(\omega'' - \omega) \sin \frac{1}{2}(\omega' - \omega'')}; \end{cases}$$

mittels welcher Formeln sich die Summen

$$E + E_1, E' + E'_1, E'' + E''_1$$

und die Differenzen

$$E - E_1, E' - E'_1, E'' - E''_1$$

leicht durch Logarithmen berechnen lassen. Die Coefficienten

$$E, E', E''; E_1, E'_1, E''_1$$

findet man aber dann ohne alle Schwierigkeit mittelst der Formeln

$$125) \begin{cases} E = \frac{1}{2} \{ (E + E_1) + (E - E_1) \}, \\ E' = \frac{1}{2} \{ (E' + E'_1) + (E' - E'_1) \}, \\ E'' = \frac{1}{2} \{ (E'' + E''_1) + (E'' - E''_1) \} \end{cases}$$

und

$$126) \begin{cases} E_1 = \frac{1}{2} \{ (E + E_1) - (E - E_1) \}, \\ E'_1 = \frac{1}{2} \{ (E' + E'_1) - (E' - E'_1) \}, \\ E''_1 = \frac{1}{2} \{ (E'' + E''_1) - (E'' - E''_1) \}. \end{cases}$$

Um die beiden Grössen

$$\cos h \sin \varphi + \cos \omega' \sin h \cos \varphi,$$

$$\cos h \sin \varphi + \cos \omega'' \sin h \cos \varphi,$$

von denen die Grössen A' und A'' abhängen, mit Leichtigkeit zu berechnen, führt man am besten ein Paar Hülfswinkel ψ' und ψ'' ein, welche man mittelst der Formeln

$$127) \begin{cases} \tan \psi' = \cos \omega' \tan h, \\ \tan \psi'' = \cos \omega'' \tan h \end{cases}$$

berechnet. Dann ist nämlich, wie man leicht findet:

$$128) \begin{cases} \cos h \sin \varphi + \cos \omega' \sin h \cos \varphi \\ = \frac{\cos h \sin (\varphi + \psi')}{\cos \psi'}, \\ \cos h \sin \varphi + \cos \omega'' \sin h \cos \varphi \\ = \frac{\cos h \sin (\varphi + \psi'')}{\cos \psi''}. \end{cases}$$

§. 11.

Wir wollen jetzt annehmen, dass man mehr als drei Sterne, überhaupt eine grössere Anzahl von Sternen, deren Declinationen

$$\delta, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \dots$$

sein mögen, in gleichen Höhen beobachtet und die Differenzen der entsprechenden Azimuthe gemessen habe. Hat man dann aus dreien dieser Beobachtungen nach der im Vorhergehenden gegebenen Anleitung die Näherungswerthe φ, h, ω der Polhöhe, der gemeinschaftlichen Höhe der Sterne, und des Azimuths eines derselben, welchen wir als den ersten annehmen wollen, hergeleitet; so kann man mittelst der Methode der kleinsten Quadrate die Verbesserungen $\Delta\varphi, \Delta h, \Delta\omega$ dieser Elemente auf folgende Art finden.

Nach 6) ist bekanntlich

$$\sin \delta = \sin (h + \Delta h) \sin (\varphi + \Delta \varphi) - \cos (\omega + \Delta \omega) \cos (h + \Delta h) \cos (\varphi + \Delta \varphi),$$

und folglich nach den Principien der Differentialrechnung

$$0 = (\sin h \sin \varphi - \cos \omega \cos h \cos \varphi) - \sin \delta \\ + (\sin h \cos \varphi + \cos \omega \cos h \sin \varphi) \Delta \varphi \\ + (\cos h \sin \varphi + \cos \omega \sin h \cos \varphi) \Delta h \\ + \sin \omega \cos h \cos \varphi \Delta \omega.$$

Bezeichnet man nun die gemessenen Azimuthaldifferenzen, welche man erhält, wenn man das Azimuth des ersten Sterns von den Azimuthen aller übrigen Sterne abzieht, durch

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \dots,$$

so sind

$$129) \begin{cases} \omega_1 = \omega + \varepsilon_1, \\ \omega_2 = \omega + \varepsilon_2, \\ \omega_3 = \omega + \varepsilon_3, \\ \omega_4 = \omega + \varepsilon_4, \\ \omega_5 = \omega + \varepsilon_5, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Näherungswerthe der Azimuthe aller auf den ersten folgenden Sterne, und offenbar ist bei dieser Betrachtung

$$\Delta\omega = \Delta\omega_1 = \Delta\omega_2 = \Delta\omega_3 = \Delta\omega_4 = \dots$$

zu setzen.

Setzt man nun

$$130) \begin{cases} \sin \delta' = \sin h \sin \varphi - \cos \omega \cos h \cos \varphi, \\ \sin \delta'_1 = \sin h \sin \varphi - \cos \omega_1 \cos h \cos \varphi, \\ \sin \delta'_2 = \sin h \sin \varphi - \cos \omega_2 \cos h \cos \varphi, \\ \sin \delta'_3 = \sin h \sin \varphi - \cos \omega_3 \cos h \cos \varphi, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

und

$$131) \begin{cases} a = 2 \sin \frac{1}{2} (\delta' - \delta) \cos \frac{1}{2} (\delta' + \delta), \\ a_1 = 2 \sin \frac{1}{2} (\delta'_1 - \delta_1) \cos \frac{1}{2} (\delta'_1 + \delta_1), \\ a_2 = 2 \sin \frac{1}{2} (\delta'_2 - \delta_2) \cos \frac{1}{2} (\delta'_2 + \delta_2), \\ a_3 = 2 \sin \frac{1}{2} (\delta'_3 - \delta_3) \cos \frac{1}{2} (\delta'_3 + \delta_3), \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

ferner

$$132) \begin{cases} b = \sin h \cos \varphi + \cos \omega \cos h \sin \varphi, \\ b_1 = \sin h \cos \varphi + \cos \omega_1 \cos h \sin \varphi, \\ b_2 = \sin h \cos \varphi + \cos \omega_2 \cos h \sin \varphi, \\ b_3 = \sin h \cos \varphi + \cos \omega_3 \cos h \sin \varphi, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

und

$$133) \begin{cases} c = \cos h \sin \varphi + \cos \omega \sin h \cos \varphi, \\ c_1 = \cos h \sin \varphi + \cos \omega_1 \sin h \cos \varphi, \\ c_2 = \cos h \sin \varphi + \cos \omega_2 \sin h \cos \varphi, \\ c_3 = \cos h \sin \varphi + \cos \omega_3 \sin h \cos \varphi, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

endlich

$$134) \begin{cases} d = \sin \omega \cos h \cos \varphi, \\ d_1 = \sin \omega_1 \cos h \cos \varphi, \\ d_2 = \sin \omega_2 \cos h \cos \varphi, \\ d_3 = \sin \omega_3 \cos h \cos \varphi, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

so hat man nach dem Obigen die folgenden Gleichungen:

$$135) \begin{cases} a + b \Delta \varphi + c \Delta h + d \Delta \omega = 0, \\ a_1 + b_1 \Delta \varphi + c_1 \Delta h + d_1 \Delta \omega = 0, \\ a_2 + b_2 \Delta \varphi + c_2 \Delta h + d_2 \Delta \omega = 0, \\ a_3 + b_3 \Delta \varphi + c_3 \Delta h + d_3 \Delta \omega = 0, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

welche man nach der Methode der kleinsten Quadrate auflösen muss.

Um die durch

$\delta', \delta'_1, \delta'_2, \delta'_3, \delta'_4, \dots$
bezeichneten Grössen mit Leichtigkeit finden zu können, berechnet man am besten die Hülfswinkel

$$\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \dots$$

mittelst der Formeln

$$136) \begin{cases} \operatorname{tang} \Theta = \cos \omega \cot h, \\ \operatorname{tang} \Theta_1 = \cos \omega_1 \cot h, \\ \operatorname{tang} \Theta_2 = \cos \omega_2 \cot h, \\ \operatorname{tang} \Theta_3 = \cos \omega_3 \cot h, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Dann ist, wie man leicht findet:

$$137) \begin{cases} \sin \delta' = \frac{\sin h \sin (\varphi - \Theta)}{\cos \Theta}, \\ \sin \delta'_1 = \frac{\sin h \sin (\varphi - \Theta_1)}{\cos \Theta_1}, \\ \sin \delta'_2 = \frac{\sin h \sin (\varphi - \Theta_2)}{\cos \Theta_2}, \\ \sin \delta'_3 = \frac{\sin h \sin (\varphi - \Theta_3)}{\cos \Theta_3}, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Die Coefficienten

$$b, b_1, b_2, b_3, b_4, \dots$$

und

$$c, c_1, c_2, c_3, c_4, \dots$$

kann man bequem auf folgende Art berechnen.

Nach 132) und 133) ist

$$138) \begin{cases} b + c = 2 \cos \frac{1}{2} \omega^2 \sin (h + \varphi), \\ b_1 + c_1 = 2 \cos \frac{1}{2} \omega_1^2 \sin (h + \varphi), \\ b_2 + c_2 = 2 \cos \frac{1}{2} \omega_2^2 \sin (h + \varphi), \\ b_3 + c_3 = 2 \cos \frac{1}{2} \omega_3^2 \sin (h + \varphi), \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

und

$$139) \begin{cases} b - c = 2 \sin \frac{1}{2} \omega^2 \sin (h - \varphi), \\ b_1 - c_1 = 2 \sin \frac{1}{2} \omega_1^2 \sin (h - \varphi), \\ b_2 - c_2 = 2 \sin \frac{1}{2} \omega_2^2 \sin (h - \varphi), \\ b_3 - c_3 = 2 \sin \frac{1}{2} \omega_3^2 \sin (h - \varphi), \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

also

$$140) \begin{cases} b = \frac{1}{2} \{ (b + c) + (b - c) \}, \\ b_1 = \frac{1}{2} \{ (b_1 + c_1) + (b_1 - c_1) \}, \\ b_2 = \frac{1}{2} \{ (b_2 + c_2) + (b_2 - c_2) \}, \\ b_3 = \frac{1}{2} \{ (b_3 + c_3) + (b_3 - c_3) \}, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

und

$$141) \begin{cases} c = \frac{1}{2} \{ (b + c) - (b - c) \}, \\ c_1 = \frac{1}{2} \{ (b_1 + c_1) - (b_1 - c_1) \}, \\ c_2 = \frac{1}{2} \{ (b_2 + c_2) - (b_2 - c_2) \}, \\ c_3 = \frac{1}{2} \{ (b_3 + c_3) - (b_3 - c_3) \}, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

$$\cos J^2 = \frac{A^2 + B^2}{1 + A^2 + B^2},$$

und folglich

$$\cos J^2 = (A^2 + B^2) \sin J^2$$

oder

$$\cos J = \sin J \sqrt{A^2 + B^2},$$

also

$$\sin J = \frac{\cos J}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Daher ist nach dem Obigen

$$\begin{aligned} \sin \delta = \sin J \sin \varphi \{ & \cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i \} \\ & \left\{ \begin{array}{l} (A \cos w - B \sin w) \cos \Theta \\ - (A \sin w + B \cos w) \sin \Theta \cos i \\ + \sin \Theta \sin i \end{array} \right\} \\ - \cos J \cos \varphi & \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \end{aligned}$$

Setzt man aber

$$86) \quad \tan \mu = \frac{B}{A},$$

so ist

$$\begin{aligned} & A \sin \frac{1}{2}(w + w') + B \cos \frac{1}{2}(w + w') \\ &= A \{ \sin \frac{1}{2}(w + w') + \cos \frac{1}{2}(w + w') \tan \mu \} \\ &= \frac{A}{\cos \mu} \sin \{ \frac{1}{2}(w + w') + \mu \}; \end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned} & A \sin w + B \cos w \\ &= A (\sin w + \cos w \tan \mu) \\ &= \frac{A}{\cos \mu} \sin (w + \mu), \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & A \cos w - B \sin w \\ &= A (\cos w - \sin w \tan \mu) \\ &= \frac{A}{\cos \mu} \cos (w + \mu). \end{aligned}$$

Auch ist, wie man leicht findet

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \pm \frac{A}{\cos \mu},$$

wo das obere oder untere Zeichen genommen werden muss, jenachdem die Grössen A und $\cos \mu$ gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben. Befolgt man aber nur die Regel, dass man, wenn

A positiv, B positiv;
 A negativ, B positiv;
 A negativ, B negativ;
 A positiv, B negativ

ist, respective

$$\begin{aligned}
 0 < \mu < 90^\circ, \\
 90^\circ < \mu < 180^\circ, \\
 180^\circ < \mu < 270^\circ, \\
 270^\circ < \mu < 360^\circ
 \end{aligned}$$

nimmt; so haben die Grössen A und $\cos \mu$ immer gleiche Vorzeichen, und man kann dann allgemein

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \frac{A}{\cos \mu},$$

also nach dem Obigen

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \cot J = \frac{A}{\cos \mu}$$

setzen.

Unter diesen Voraussetzungen ist nach dem Obigen

$$87) \begin{cases} P = \sin(w - w') \\ \quad - 2 \tan i \tan J \sin \frac{1}{2}(w - w') \sin \left\{ \frac{1}{2}(w + w') + \mu \right\}, \\ Q = \cos(w - w') \\ \quad - \sin 2i \tan J \cos \frac{1}{2}(w - w') \sin \left\{ \frac{1}{2}(w + w') + \mu \right\} \\ \quad - \sin i^2 \{ \tan J^2 - \sin(w + \mu) \sin(w' + \mu) \} \end{cases}$$

und

$$88) \begin{cases} P' = \sin(w - w') \\ \quad - 2 \tan i \tan J \sin \frac{1}{2}(w - w') \sin \left\{ \frac{1}{2}(w + w') + \mu \right\}, \\ Q' = \cos(w - w') \\ \quad - \sin 2i \tan J \cos \frac{1}{2}(w - w') \sin \left\{ \frac{1}{2}(w + w') + \mu \right\}. \end{cases}$$

Ferner ist nach dem Obigen

$$89) \sin \delta = \sin J \sin \varphi \{ \cos i + \cot J \sin(w + \mu) \sin i \} \\
 \quad - \cos J \cos \varphi \left\{ \begin{aligned} &\cos(w + \mu) \cos \Theta \\ &- \sin(w + \mu) \sin \Theta \cos i \\ &+ \tan J \sin \Theta \sin i \end{aligned} \right\},$$

oder, wie man leicht findet:

$$90) \sin \delta = \sin J \sin \varphi \{ 1 + \cot J \sin(w + \mu) \sin i - 2 \sin \frac{1}{2} i^2 \} \\
 \quad - \cos J \cos \varphi \left\{ \begin{aligned} &\cos(w + \Theta + \mu) \\ &+ \tan J \sin \Theta \sin i \\ &+ 2 \sin(w + \mu) \sin \Theta \sin \frac{1}{2} i^2 \end{aligned} \right\};$$

oder auch

$$91) \sin \delta = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos(w + \Theta + \mu) \\
 \quad + \{ \cos J \sin \varphi \sin(w + \mu) - \sin J \cos \varphi \sin \Theta \} \sin i \\
 \quad - 2 \{ \sin J \sin \varphi + \cos J \cos \varphi \sin(w + \mu) \sin \Theta \} \sin \frac{1}{2} i^2.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$92) w + \Theta + \mu = v,$$

so ist

$$\cos J^2 = \frac{A^2 + B^2}{1 + A^2 + B^2},$$

und folglich

$$\cos J^2 = (A^2 + B^2) \sin J^2$$

oder

$$\cos J = \sin J \sqrt{A^2 + B^2},$$

also

$$\sin J = \frac{\cos J}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Daher ist nach dem Obigen

$$\begin{aligned} \sin \delta = \sin J \sin \varphi \{ & \cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i \} \\ & \left\{ \begin{array}{l} (A \cos w - B \sin w) \cos \Theta \\ - (A \sin w + B \cos w) \sin \Theta \cos i \\ + \sin \Theta \sin i \end{array} \right\} \\ & - \cos J \cos \varphi \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \end{aligned}$$

Setzt man aber

$$86) \quad \tan \mu = \frac{B}{A},$$

so ist

$$\begin{aligned} & A \sin \frac{1}{2}(w + w') + B \cos \frac{1}{2}(w + w') \\ & = A \{ \sin \frac{1}{2}(w + w') + \cos \frac{1}{2}(w + w') \tan \mu \} \\ & = \frac{A}{\cos \mu} \sin \{ \frac{1}{2}(w + w') + \mu \}; \end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned} & A \sin w + B \cos w \\ & = A (\sin w + \cos w \tan \mu) \\ & = \frac{A}{\cos \mu} \sin (w + \mu), \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & A \cos w - B \sin w \\ & = A (\cos w - \sin w \tan \mu) \\ & = \frac{A}{\cos \mu} \cos (w + \mu). \end{aligned}$$

Auch ist, wie man leicht findet

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \pm \frac{A}{\cos \mu},$$

wo das obere oder untere Zeichen genommen werden muss, jenachdem die Grössen A und $\cos \mu$ gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben. Befolgt man aber nur die Regel, dass man, wenn

A positiv, B positiv;
 A negativ, B positiv;
 A negativ, B negativ;
 A positiv, B negativ

ist, respective

$$0 < \mu < 90^\circ,$$

$$90^\circ < \mu < 180^\circ,$$

$$180^\circ < \mu < 270^\circ,$$

$$270^\circ < \mu < 360^\circ$$

nimmt; so haben die Grössen A und $\cos \mu$ immer gleiche Vorzeichen, und man kann dann allgemein

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \frac{A}{\cos \mu},$$

also nach dem Obigen

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \cot J = \frac{A}{\cos \mu}$$

setzen.

Unter diesen Voraussetzungen ist nach dem Obigen

$$87) \begin{cases} P = \sin(w - w') \\ \quad - 2 \tan i \tan J \sin \frac{1}{2}(w - w') \sin \{ \frac{1}{2}(w + w') + \mu \}, \\ Q = \cos(w - w') \\ \quad - \sin 2i \tan J \cos \frac{1}{2}(w - w') \sin \{ \frac{1}{2}(w + w') + \mu \} \\ \quad - \sin i^2 \{ \tan J^2 - \sin(w + \mu) \sin(w' + \mu) \} \end{cases}$$

und

$$88) \begin{cases} P' = \sin(w - w') \\ \quad - 2 \tan i \tan J \sin \frac{1}{2}(w - w') \sin \{ \frac{1}{2}(w + w') + \mu \}, \\ Q' = \cos(w - w') \\ \quad - \sin 2i \tan J \cos \frac{1}{2}(w - w') \sin \{ \frac{1}{2}(w + w') + \mu \}. \end{cases}$$

Ferner ist nach dem Obigen

$$89) \sin \delta = \sin J \sin \varphi \{ \cos i + \cot J \sin(w + \mu) \sin i \}$$

$$- \cos J \cos \varphi \left\{ \begin{aligned} &\cos(w + \mu) \cos \Theta \\ &- \sin(w + \mu) \sin \Theta \cos i \\ &+ \tan J \sin \Theta \sin i \end{aligned} \right\},$$

oder, wie man leicht findet:

$$90) \sin \delta = \sin J \sin \varphi \{ 1 + \cot J \sin(w + \mu) \sin i - 2 \sin \frac{1}{2} i^2 \}$$

$$- \cos J \cos \varphi \left\{ \begin{aligned} &\cos(w + \Theta + \mu) \\ &+ \tan J \sin \Theta \sin i \\ &+ 2 \sin(w + \mu) \sin \Theta \sin \frac{1}{2} i^2 \end{aligned} \right\};$$

oder auch

$$91) \sin \delta = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos(w + \Theta + \mu) \\ + \{ \cos J \sin \varphi \sin(w + \mu) - \sin J \cos \varphi \sin \Theta \} \sin i \\ - 2 \{ \sin J \sin \varphi + \cos J \cos \varphi \sin(w + \mu) \sin \Theta \} \sin \frac{1}{2} i^2.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$92) w + \Theta + \mu = v,$$

so ist

$$\cos J^2 = \frac{A^2 + B^2}{1 + A^2 + B^2},$$

und folglich

$$\cos J^2 = (A^2 + B^2) \sin J^2$$

oder

$$\cos J = \sin J \sqrt{A^2 + B^2},$$

also

$$\sin J = \frac{\cos J}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Daher ist nach dem Obigen

$$\begin{aligned} \sin \delta = \sin J \sin \varphi \{ & \cos i + (A \sin w + B \cos w) \sin i \} \\ & \left\{ \begin{array}{l} (A \cos w - B \sin w) \cos \Theta \\ - (A \sin w + B \cos w) \sin \Theta \cos i \\ + \sin \Theta \sin i \end{array} \right\} \\ - \cos J \cos \varphi & \frac{\quad}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \end{aligned}$$

Setzt man aber

$$86) \quad \tan \mu = \frac{B}{A},$$

so ist

$$\begin{aligned} & A \sin \frac{1}{2}(w + w') + B \cos \frac{1}{2}(w + w') \\ &= A \{ \sin \frac{1}{2}(w + w') + \cos \frac{1}{2}(w + w') \tan \mu \} \\ &= \frac{A}{\cos \mu} \sin \{ \frac{1}{2}(w + w') + \mu \}; \end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned} & A \sin w + B \cos w \\ &= A (\sin w + \cos w \tan \mu) \\ &= \frac{A}{\cos \mu} \sin (w + \mu), \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & A \cos w - B \sin w \\ &= A (\cos w - \sin w \tan \mu) \\ &= \frac{A}{\cos \mu} \cos (w + \mu). \end{aligned}$$

Auch ist, wie man leicht findet

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \pm \frac{A}{\cos \mu},$$

wo das obere oder untere Zeichen genommen werden muss, jenachdem die Grössen A und $\cos \mu$ gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben. Befolgt man aber nur die Regel, dass man, wenn

A positiv, B positiv;
 A negativ, B positiv;
 A negativ, B negativ;
 A positiv, B negativ

ist, respective

$$0 < \mu < 90^\circ,$$

$$90^\circ < \mu < 180^\circ,$$

$$180^\circ < \mu < 270^\circ,$$

$$270^\circ < \mu < 360^\circ$$

nimmt; so haben die Grössen A und $\cos \mu$ immer gleiche Vorzeichen, und man kann dann allgemein

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \frac{A}{\cos \mu},$$

also nach dem Obigen

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \cot J = \frac{A}{\cos \mu}$$

setzen.

Unter diesen Voraussetzungen ist nach dem Obigen

$$87) \begin{cases} P = \sin(w - w') \\ \quad - 2 \tan i \tan J \sin \frac{1}{2}(w - w') \sin \left\{ \frac{1}{2}(w + w') + \mu \right\}, \\ Q = \cos(w - w') \\ \quad - \sin 2i \tan J \cos \frac{1}{2}(w - w') \sin \left\{ \frac{1}{2}(w + w') + \mu \right\} \\ \quad - \sin i^2 \{ \tan J^2 - \sin(w + \mu) \sin(w' + \mu) \} \end{cases}$$

und

$$88) \begin{cases} P' = \sin(w - w') \\ \quad - 2 \tan i \tan J \sin \frac{1}{2}(w - w') \sin \left\{ \frac{1}{2}(w + w') + \mu \right\}, \\ Q' = \cos(w - w') \\ \quad - \sin 2i \tan J \cos \frac{1}{2}(w - w') \sin \left\{ \frac{1}{2}(w + w') + \mu \right\}. \end{cases}$$

Ferner ist nach dem Obigen

$$89) \sin \delta = \sin J \sin \varphi \{ \cos i + \cot J \sin(w + \mu) \sin i \}$$

$$- \cos J \cos \varphi \left\{ \begin{aligned} &\cos(w + \mu) \cos \Theta \\ &- \sin(w + \mu) \sin \Theta \cos i \\ &+ \tan J \sin \Theta \sin i \end{aligned} \right\},$$

oder, wie man leicht findet:

$$90) \sin \delta = \sin J \sin \varphi \{ 1 + \cot J \sin(w + \mu) \sin i - 2 \sin \frac{1}{2} i^2 \}$$

$$- \cos J \cos \varphi \left\{ \begin{aligned} &\cos(w + \Theta + \mu) \\ &+ \tan J \sin \Theta \sin i \\ &+ 2 \sin(w + \mu) \sin \Theta \sin \frac{1}{2} i^2 \end{aligned} \right\};$$

oder auch

$$91) \sin \delta = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos(w + \Theta + \mu) \\ + \{ \cos J \sin \varphi \sin(w + \mu) - \sin J \cos \varphi \sin \Theta \} \sin i \\ - 2 \{ \sin J \sin \varphi + \cos J \cos \varphi \sin(w + \mu) \sin \Theta \} \sin \frac{1}{2} i^2.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$92) w + \Theta + \mu = v,$$

so ist

$$93) \sin \delta = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v \\ + \{ \cos J \sin \varphi \sin (v - \Theta) - \sin J \cos \varphi \sin \Theta \} \sin i \\ - 2 \{ \sin J \sin \varphi + \cos J \cos \varphi \sin (v - \Theta) \sin \Theta \} \sin \frac{1}{2} i^2.$$

§. 8.

Für drei bei unverrückter Lage des Fernrohrs beobachtete Sterne, deren Declinationen wie früher δ , δ' , δ'' sein mögen, haben wir nun nach 93), da φ , J , i , Θ , μ nach dem Vorhergehenden offenbar für die drei Beobachtungen constante Grössen sind, wenn wir durch w , w' , w'' die den drei Beobachtungen entsprechenden Werthe des im Obigen im Allgemeinen durch w bezeichneten Winkels bezeichnen, und

$$v = w + \Theta + \mu,$$

$$v' = w' + \Theta + \mu,$$

$$v'' = w'' + \Theta + \mu$$

gesetzt wird, die drei folgenden in aller Strenge gültigen Gleichungen:

$$\sin \delta = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v \\ + \{ \cos J \sin \varphi \sin (v - \Theta) - \sin J \cos \varphi \sin \Theta \} \sin i \\ - 2 \{ \sin J \sin \varphi + \cos J \cos \varphi \sin (v - \Theta) \sin \Theta \} \sin \frac{1}{2} i^2;$$

$$\sin \delta' = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v' \\ + \{ \cos J \sin \varphi \sin (v' - \Theta) - \sin J \cos \varphi \sin \Theta \} \sin i \\ - 2 \{ \sin J \sin \varphi + \cos J \cos \varphi \sin (v' - \Theta) \sin \Theta \} \sin \frac{1}{2} i^2,$$

$$\sin \delta'' = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v'' \\ + \{ \cos J \sin \varphi \sin (v'' - \Theta) - \sin J \cos \varphi \sin \Theta \} \sin i \\ - 2 \{ \sin J \sin \varphi + \cos J \cos \varphi \sin (v'' - \Theta) \sin \Theta \} \sin \frac{1}{2} i^2.$$

Erinnert man sich an die im Obigen den Symbolen i , Θ , J beigelegte Bedeutung, so wird leicht erhellen, dass dem Beobachter bei Anordnung der Beobachtungen eine im Ganzen freie Disposition über diese Grössen zusteht. Ordnet man nun die Beobachtungen so an, dass die Grössen $\sin i$, $\sin \Theta$, $\cos J$ der Null so nahe wie möglich kommen, so kann man, da die absoluten Werthe der Grössen

$$\cos J \sin i, \sin \Theta \sin i, \sin \frac{1}{2} i^2$$

dann kleine Grössen der zweiten Ordnung sind, erst mit Vernachlässigung kleiner Grössen der zweiten Ordnung näherungsweise

$$94) \begin{cases} \sin \delta = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v, \\ \sin \delta' = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v', \\ \sin \delta'' = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v''; \end{cases}$$

also

$$95) \begin{cases} \sin \delta = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v, \\ \sin \delta' = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos \{v + (v' - v)\}, \\ \sin \delta'' = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos \{v + (v'' - v)\}; \end{cases}$$

und folglich, weil nach dem Obigen

$$v' - v = w' - w,$$

$$v'' - v = w'' - w,$$

ist,

$$96) \begin{cases} \sin \delta = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v, \\ \sin \delta' = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos \{v + (w' - w)\}, \\ \sin \delta'' = \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos \{v + (w'' - w)\} \end{cases}$$

setzen.

Die Differenzen $w' - w$, $w'' - w$ werden, wie aus der aus dem vorhergehenden Paragraphen bekannten Bedeutung der Winkel w , w' , w'' auf der Stelle von selbst erhellet, unmittelbar aus den auf dem Limbus des Theodoliten gemachten Ablesungen erhalten, und können daher als bekannt betrachtet werden, so dass also die drei vorhergehenden Gleichungen nur die drei unbekannten Grössen J , v , φ enthalten. Um nun die letzte dieser drei Grössen, nämlich die Polhöhe, zu finden, ziehe man die zweite und dritte Gleichung von der ersten ab, so erhält man die beiden Gleichungen:

$$\sin \delta - \sin \delta' = -\cos J \cos \varphi \{\cos v - \cos (v + (w' - w))\},$$

$$\sin \delta - \sin \delta'' = -\cos J \cos \varphi \{\cos v - \cos (v + (w'' - w))\};$$

also nach bekannten goniometrischen Formeln

$$\begin{aligned} & \sin \frac{1}{2}(\delta - \delta') \cos \frac{1}{2}(\delta + \delta') \\ &= \cos J \cos \varphi \sin \frac{1}{2}(w' - w) \sin \{v + \frac{1}{2}(w' - w)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sin \frac{1}{2}(\delta - \delta'') \cos \frac{1}{2}(\delta + \delta'') \\ &= \cos J \cos \varphi \sin \frac{1}{2}(w'' - w) \sin \{v + \frac{1}{2}(w'' - w)\}; \end{aligned}$$

und folglich, wenn man der Kürze wegen

$$97) \begin{cases} \mathfrak{M} = \sin \frac{1}{2}(\delta - \delta') \cos \frac{1}{2}(\delta + \delta') \sin \frac{1}{2}(w'' - w), \\ \mathfrak{N} = \sin \frac{1}{2}(\delta - \delta'') \cos \frac{1}{2}(\delta + \delta'') \sin \frac{1}{2}(w' - w) \end{cases}$$

setzt:

$$98) \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}} = \frac{\sin \{v + \frac{1}{2}(w' - w)\}}{\sin \{v + \frac{1}{2}(w'' - w)\}},$$

woraus man ferner ohne Schwierigkeit

$$\begin{aligned} 99) & \frac{\mathfrak{M} - \mathfrak{N}}{\mathfrak{M} + \mathfrak{N}} \\ &= \tan \frac{1}{4} \{(w' - w) - (w'' - w)\} \cot \{v + \frac{1}{4}(w' - w) + \frac{1}{4}(w'' - w)\} \end{aligned}$$

erhält. Berechnet man aber den Hülfswinkel ζ mittelst der Formel

$$100) \tan \zeta = \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}},$$

so wird

$$\begin{aligned} 101) & \tan \{v + \frac{1}{4}(w' - w) + \frac{1}{4}(w'' - w)\} \\ &= \tan (45^\circ + \zeta) \tan \frac{1}{4} \{(w' - w) - (w'' - w)\}. \end{aligned}$$

Aus den beiden ersten der drei Gleichungen 96) folgt

$$\cos J \cos \varphi = - \frac{\sin \delta - \sin \delta'}{\cos v - \cos \{v + (w' - w)\}},$$

$$\sin J \sin \varphi = - \frac{\sin \delta \cos \{v + (w' - w)\} - \sin \delta' \cos v}{\cos v - \cos \{v + (w' - w)\}};$$

oder

$$102) \begin{cases} \cos J \cos \varphi = - \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta - \delta') \cos \frac{1}{2}(\delta + \delta')}{\sin \frac{1}{2}(w' - w) \sin \{v + \frac{1}{2}(w' - w)\}}, \\ \sin J \sin \varphi = - \frac{\sin \delta \cos \{v + (w' - w)\} - \sin \delta' \cos v}{\sin \frac{1}{2}(w' - w) \sin \{v + \frac{1}{2}(w' - w)\}}. \end{cases}$$

Bezeichnen wir einen der Gleichung 101) genügenden Werth von

$$v + \frac{1}{4}(w' - w) + \frac{1}{4}(w'' - w)$$

durch v_1 , so ist, wenn k eine positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, bekanntlich

$$v + \frac{1}{4}(w' - w) + \frac{1}{4}(w'' - w) = v_1 + k\pi,$$

und folglich

$$103) v = v_1 - \frac{1}{4}(w' - w) - \frac{1}{4}(w'' - w) + k\pi$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$104) u = v_1 - \frac{1}{4}(w' - w) - \frac{1}{4}(w'' - w)$$

setzen:

$$105) v = u + k\pi.$$

Also ist nach 102), wie man leicht findet:

$$106) \begin{cases} \cos J \cos \varphi = - \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta - \delta') \cos \frac{1}{2}(\delta + \delta')}{\sin \frac{1}{2}(w' - w) \sin \{u + \frac{1}{2}(w' - w)\}} \cdot (-1)^k, \\ \sin J \sin \varphi = - \frac{\sin \delta \cos \{u + (w' - w)\} - \sin \delta' \cos u}{\sin \frac{1}{2}(w' - w) \sin \{u + \frac{1}{2}(w' - w)\}}. \end{cases}$$

Weil nun die Grössen

$$\cos J \cos \varphi, \sin J \sin \varphi$$

offenbar immer positiv sind, so ist, wenn wir die absoluten Werthe von

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\delta - \delta') \cos \frac{1}{2}(\delta + \delta')}{\sin \frac{1}{2}(w' - w) \sin \{u + \frac{1}{2}(w' - w)\}},$$

$$\frac{\sin \delta \cos \{u + (w' - w)\} - \sin \delta' \cos u}{\sin \frac{1}{2}(w' - w) \sin \{u + \frac{1}{2}(w' - w)\}}$$

respective durch

$$\mathfrak{R}, \mathfrak{L}$$

bezeichnen, offenbar

$$\cos J \cos \varphi = \mathfrak{R}, \sin J \sin \varphi = \mathfrak{L};$$

also durch Addition und Subtraction

$$107) \begin{cases} \cos(J - \varphi) = \mathfrak{K} + \mathfrak{L}, \\ \cos(J + \varphi) = \mathfrak{K} - \mathfrak{L}. \end{cases}$$

Der absolute Werth von $J - \varphi$ übersteigt 90° nicht, und $J + \varphi$ ist nicht grösser als 180° . Bezeichnet also D den absoluten Werth von $J - \varphi$, und S den Werth von $J + \varphi$, so ist

$$J - \varphi = \pm D, \quad J + \varphi = S;$$

also

$$108) \quad J = \frac{1}{2}(S \pm D), \quad \varphi = \frac{1}{2}(S \mp D).$$

Ob man die obern oder die untern Zeichen in diesen Formeln zu nehmen hat, lässt sich nur dadurch entscheiden, dass man sich durch Beobachtung wenigstens einen genäherten Werth von J verschafft, zu welchem Zwecke am besten am Theodoliten, wie dies auch meistens der Fall ist, ein wenn auch nur eine untergeordnete Genauigkeit gewährender Höhenkreis angebracht wird.

Bis jetzt haben wir die Grössen δ , δ' , δ'' und $w' - w$, $w'' - w$ als fehlerfrei betrachtet. Die ersteren können aber wegen der Unrichtigkeit der Sternverzeichnisse, die letzteren wegen der Unrichtigkeit der Theilung des Limbus des Theodoliten und der Ablesung mit Fehlern behaftet sein, und wir wollen daher nun noch untersuchen, welchen Einfluss diese Fehler auf die Bestimmung der Polhöhe ausüben.

Betrachten wir zu dem Ende die Fehler wie gewöhnlich als Differentiale, so haben wir nach dem Obigen eigentlich die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sin(\delta + d\delta) &= \sin(J + dJ) \sin(\varphi + d\varphi) \\ &\quad - \cos(J + dJ) \cos(\varphi + d\varphi) \cos(v + dv), \\ \sin(\delta' + d\delta') &= \sin(J + dJ) \sin(\varphi + d\varphi) \\ &\quad - \cos(J + dJ) \cos(\varphi + d\varphi) \cos\{v + dv + (w' - w) + d(w' - w)\}, \\ \sin(\delta'' + d\delta'') &= \sin(J + dJ) \sin(\varphi + d\varphi) \\ &\quad - \cos(J + dJ) \cos(\varphi + d\varphi) \cos\{v + dv + (w'' - w) + d(w'' - w)\}; \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \sin(\delta + d\delta) &= \sin(J + dJ) \sin(\varphi + d\varphi) \\ &\quad - \cos(J + dJ) \cos(\varphi + d\varphi) \cos(v + dv), \\ \sin(\delta' + d\delta') &= \sin(J + dJ) \sin(\varphi + d\varphi) \\ &\quad - \cos(J + dJ) \cos(\varphi + d\varphi) \cos\{v' + dv + d(w' - w)\}, \\ \sin(\delta'' + d\delta'') &= \sin(J + dJ) \sin(\varphi + d\varphi) \\ &\quad - \cos(J + dJ) \cos(\varphi + d\varphi) \cos\{v'' + dv + d(w'' - w)\}. \end{aligned}$$

Also ist nach den Principien der Differentialrechnung:

$$\begin{aligned} &\sin \delta + \cos \delta d\delta \\ &= \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v \\ &\quad + (\cos J \sin \varphi + \sin J \cos \varphi \cos v) dJ \\ &\quad + (\sin J \cos \varphi + \cos J \sin \varphi \cos v) d\varphi \\ &\quad + \cos J \cos \varphi \sin v dv, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sin \delta' + \cos \delta' d\delta' \\
&= \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v' \\
&+ (\cos J \sin \varphi + \sin J \cos \varphi \cos v') dJ \\
&+ (\sin J \cos \varphi + \cos J \sin \varphi \cos v') d\varphi \\
&+ \cos J \cos \varphi \sin v' \{dv + d(w' - w)\}, \\
&\sin \delta'' + \cos \delta'' d\delta'' \\
&= \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v'' \\
&+ (\cos J \sin \varphi + \sin J \cos \varphi \cos v'') dJ \\
&+ (\sin J \cos \varphi + \cos J \sin \varphi \cos v'') d\varphi \\
&+ \cos J \cos \varphi \sin v'' \{dv + d(w'' - w)\}.
\end{aligned}$$

Weil nun aber nach dem Obigen

$$\begin{aligned}
\sin \delta &= \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v, \\
\sin \delta' &= \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v', \\
\sin \delta'' &= \sin J \sin \varphi - \cos J \cos \varphi \cos v''
\end{aligned}$$

ist, so lassen sich die obigen Gleichungen unter der folgenden einfachern Form darstellen:

$$\begin{aligned}
\cos \delta d\delta &= (\cos J \sin \varphi + \sin J \cos \varphi \cos v) dJ \\
&+ (\sin J \cos \varphi + \cos J \sin \varphi \cos v) d\varphi \\
&+ \cos J \cos \varphi \sin v dv, \\
\cos \delta' d\delta' &= (\cos J \sin \varphi + \sin J \cos \varphi \cos v') dJ \\
&+ (\sin J \cos \varphi + \cos J \sin \varphi \cos v') d\varphi \\
&+ \cos J \cos \varphi \sin v' \{dv + d(w' - w)\}, \\
\cos \delta'' d\delta'' &= (\cos J \sin \varphi + \sin J \cos \varphi \cos v'') dJ \\
&+ (\sin J \cos \varphi + \cos J \sin \varphi \cos v'') d\varphi \\
&+ \cos J \cos \varphi \sin v'' \{dv + d(w'' - w)\};
\end{aligned}$$

oder, wie sich aus diesen Gleichungen sogleich ergibt:

$$\begin{aligned}
\cos \delta d\delta &= (\cos J \sin \varphi + \sin J \cos \varphi \cos v) dJ \\
&+ \cos J \cos \varphi \sin v dv \\
&+ (\sin J \cos \varphi + \cos J \sin \varphi \cos v) d\varphi, \\
\cos \delta' d\delta' - \sin J \cos \varphi \sin v' d(w' - w) &= (\cos J \sin \varphi + \sin J \cos \varphi \cos v') dJ \\
&+ \cos J \cos \varphi \sin v' dv \\
&+ (\sin J \cos \varphi + \cos J \sin \varphi \cos v') d\varphi, \\
\cos \delta'' d\delta'' - \sin J \cos \varphi \sin v'' d(w'' - w) &= (\cos J \sin \varphi + \sin J \cos \varphi \cos v'') dJ \\
&+ \cos J \cos \varphi \sin v'' dv \\
&+ (\sin J \cos \varphi + \cos J \sin \varphi \cos v'') d\varphi.
\end{aligned}$$

Der Kürze wegen wollen wir diese drei Gleichungen durch

$$\begin{aligned}
A &= adJ + b dv + c d\varphi, \\
A' &= a' dJ + b' dv + c' d\varphi, \\
A'' &= a'' dJ + b'' dv + c'' d\varphi
\end{aligned}$$

bezeichnen, wo die Bedeutung der Symbole

$$A, A', A''$$

und

$$a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''$$

von selbst erhellet.

Durch Elimination von dv erhalten wir die beiden Gleichungen

$$Ab' - A'b = (ab' - a'b) dJ + (cb' - c'b) d\varphi,$$

$$Ab'' - A''b = (ab'' - a''b) dJ + (cb'' - c''b) d\varphi.$$

Nun ist aber, wie man mit Hülfe einiger bekannten goniometrischen Relationen leicht findet:

$$ab' - a'b =$$

$$- 2 \cos J \cos \varphi \sin \frac{1}{2} (v - v') \left\{ \begin{array}{l} \cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2} (v + v') \\ + \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2} (v - v') \end{array} \right\}$$

und

$$cb' - c'b =$$

$$- 2 \cos J \cos \varphi \sin \frac{1}{2} (v - v') \left\{ \begin{array}{l} \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2} (v + v') \\ + \cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2} (v - v') \end{array} \right\},$$

so wie auf ähnliche Art

$$ab'' - a''b =$$

$$- 2 \cos J \cos \varphi \sin \frac{1}{2} (v - v'') \left\{ \begin{array}{l} \cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2} (v + v'') \\ + \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2} (v - v'') \end{array} \right\}$$

und

$$cb'' - c''b =$$

$$- 2 \cos J \cos \varphi \sin \frac{1}{2} (v - v'') \left\{ \begin{array}{l} \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2} (v + v'') \\ + \cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2} (v - v'') \end{array} \right\};$$

ferner

$$Ab' - A'b = (A \sin v' - A' \sin v) \cos J \cos \varphi,$$

$$Ab'' - A''b = (A \sin v'' - A'' \sin v) \cos J \cos \varphi.$$

Also hat man nach dem Obigen die beiden folgenden Gleichungen:

$$= \frac{A \sin v' - A' \sin v}{2 \sin \frac{1}{2} (v - v')}$$

$$= \{ \cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2} (v + v') + \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2} (v - v') \} dJ \\ + \{ \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2} (v + v') + \cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2} (v - v') \} d\varphi,$$

$$= \frac{A \sin v'' - A'' \sin v}{2 \sin \frac{1}{2} (v - v'')}$$

$$= \{ \cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2} (v + v'') + \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2} (v - v'') \} dJ \\ + \{ \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2} (v + v'') + \cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2} (v - v'') \} d\varphi.$$

Bezeichnen wir nun diese beiden Gleichungen der Kürze wegen durch

$$\mathcal{X} = \alpha dJ + \beta d\varphi,$$

$$\mathcal{X}' = \alpha' dJ + \beta' d\varphi;$$

so ist

$$\mathcal{X}\alpha' - \mathcal{X}'\alpha = -(\alpha\beta' - \alpha'\beta) d\varphi.$$

Ohne Schwierigkeit findet man aber mit Hülfe bekannter goniometrischer Relationen

und

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = \sin v \sin(J - \varphi) \sin(J + \varphi) \sin \frac{1}{2}(v' - v'')$$

$$2(\mathcal{A}\alpha' - \mathcal{A}'\alpha) \frac{\sin \frac{1}{2}(v - v') \sin \frac{1}{2}(v'' - v)}{\sin v}$$

$$= A \sin \frac{1}{2}(v' - v'') \left\{ \begin{array}{l} \cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(v' + v'') \\ + \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(v' - v'') \end{array} \right\}$$

$$+ A' \sin \frac{1}{2}(v'' - v) \left\{ \begin{array}{l} \cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(v'' + v) \\ + \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(v'' - v) \end{array} \right\}$$

$$+ A'' \sin \frac{1}{2}(v - v') \left\{ \begin{array}{l} \cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(v + v') \\ + \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(v - v') \end{array} \right\}$$

Also ist nach dem Obigen

$$\begin{aligned} 109) \quad d\varphi = & \frac{\cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(v' + v'') + \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(v' - v'')}{2 \sin(J - \varphi) \sin(J + \varphi) \sin \frac{1}{2}(v - v') \sin \frac{1}{2}(v'' - v)} A \\ & - \frac{\cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(v'' + v) + \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(v'' - v)}{2 \sin(J - \varphi) \sin(J + \varphi) \sin \frac{1}{2}(v' - v'') \sin \frac{1}{2}(v - v')} A' \\ & - \frac{\cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(v + v') + \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(v - v')}{2 \sin(J - \varphi) \sin(J + \varphi) \sin \frac{1}{2}(v'' - v) \sin \frac{1}{2}(v' - v'')} A'' \end{aligned}$$

oder nach dem Obigen

$$\begin{aligned} 110) \quad dq = & \frac{\cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(v' + v'') + \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(v' - v'')}{2 \sin(J - \varphi) \sin(J + \varphi) \sin \frac{1}{2}(w - w') \sin \frac{1}{2}(w'' - w)} A \\ & - \frac{\cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(v'' + v) + \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(v'' - v)}{2 \sin(J - \varphi) \sin(J + \varphi) \sin \frac{1}{2}(w' - w'') \sin \frac{1}{2}(w - w')} A' \\ & - \frac{\cos J \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(v + v') + \sin J \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(v - v')}{2 \sin(J - \varphi) \sin(J + \varphi) \sin \frac{1}{2}(w'' - w) \sin \frac{1}{2}(w' - w'')} A'' \end{aligned}$$

wo nach dem Obigen

$$111) \quad \begin{cases} A = \cos \delta d\delta, \\ A' = \cos \delta' d\delta' - \sin J \cos \varphi \sin v' d(w' - w), \\ A'' = \cos \delta'' d\delta'' - \sin J \cos \varphi \sin v'' d(w'' - w) \end{cases}$$

ist.

§. 9.

Aus den sämtlichen im vorhergehenden Paragraphen angestellten Untersuchungen lassen sich nun die folgenden für die praktische Anwendung unserer Methode, die Polhöhe zu bestimmen, jedenfalls sehr wichtigen Resultate ziehen.

1. Zuvörderst wissen wir aus dem vorhergehenden Paragraphen, dass $\sin \Theta$ der Null möglichst nahe kommen muss. Nun ist aber Θ der von dem positiven Theile der Axe der x_2 , welche die Durchschnittslinie der Ebene des Limbus des

Theodoliten mit der Ebene des Horizonts ist, mit dem positiven Theile der Axe der x , welche die Mittagslinie ist, eingeschlossene, von dem positiven Theile der Axe der x an durch den rechten Winkel (xy) hindurch von 0 bis 360° gezählte Winkel, und es muss also die Durchschnittslinie der Ebene des Limbus des Theodoliten mit der Ebene des Horizonts möglichst nahe mit der Mittagslinie zusammenfallen. Bei der Horizontalstellung des Limbus des Theodoliten stellt man bekanntlich das Niveau zuerst parallel mit der durch die Köpfe zweier Fusschrauben des Theodoliten gehenden geraden Linie, und dann senkrecht gegen dieselbe Linie. Daher wird man, um die Durchschnittslinie der Ebene des Limbus des Theodoliten mit der Ebene des Horizonts möglichst nahe mit der Mittagslinie zusammenfallend zu machen, vor der Horizontalstellung des Limbus jederzeit den Theodoliten so aufzustellen haben, dass die durch die Köpfe zweier Fusschrauben gehende gerade Linie, mit welcher man bei der Horizontalstellung des Limbus das Niveau parallel zu stellen beabsichtigt, mit der Mittagslinie möglichst nahe zusammenfällt, oder von Süden nach Norden gerichtet ist.

2. Nach dem vorhergehenden Paragraphen muss ferner $\sin i$ der Null möglichst nahe kommen, und auf die Erfüllung dieser Bedingung ist, wie sich aus der im vorhergehenden Paragraphen angestellten Untersuchung auf die unzweideutigste Weise ergibt, jedenfalls eine ganz vorzügliche Sorgfalt zu verwenden. Da nun bekanntlich i der 90° nicht übersteigende, positiv oder negativ genommene Neigungswinkel der Ebene des Limbus des Theodoliten gegen die Ebene des Horizonts ist, so muss man die Ebene des Limbus des Theodoliten mit aller nur möglichen Sorgfalt horizontal stellen, und ein sehr gutes Niveau ist daher jedenfalls als ein Haupterforderniss bei der Anwendung unserer Methode zur Bestimmung der Polhöhe zu betrachten, wie sich dies auch gleich nachher noch weiter herausstellen wird. Hierbei bemerken wir aber zugleich auch noch, dass, wie sich aus den im vorhergehenden Paragraphen angestellten Entwicklungen von selbst ergibt, die übrigen gewöhnlichen Berichtigungen des Theodoliten — die Horizontalstellung der Drehungsaxe des Fernrohrs, die Berichtigung der Visirlinie des Fernrohrs — als für unsere Methode zur Bestimmung der Polhöhe ganz unwesentliche Erfordernisse zu betrachten sind, indem es nach dem vorhergehenden Paragraphen bei der Anwendung dieser Methode offenbar bloss darauf ankommt, dass die Lage der Visirlinie gegen die Ebene des Limbus des Theodoliten für alle drei Beobachtungen als constant betrachtet werden kann, weshalb es jedenfalls bei der Anwendung dieser Methode auch als eine nicht zu übersehende Rücksicht angesehen werden muss,

dass man eine solche Auswahl der drei Sterne trifft, dass dieselben in möglichst kurzen Zeitintervallen gleiche Höhen über dem Horizonte erreichen.

3. Aus den im vorhergehenden Paragraphen zu Tage liegenden Gründen muss auch $\cos J$ der Null möglichst nahe kommen, also J , nämlich der 90° nicht übersteigende Neigungswinkel der Visirlinie gegen die Ebene des Limbus des Theodoliten, möglichst nahe 90° betragen, oder die Visirlinie möglichst genau nach dem Zenith gerichtet sein, was aber sogleich durch das Folgende eine wesentliche Modification erleiden wird.

4. Aus den Gleichungen 110) und 111) ergibt sich nämlich auf der Stelle, dass die aus der Ungenauigkeit der Theilung des Limbus und aus Fehlern der Ablesung entspringenden Fehler $d(w' - w)$ und $d(w'' - w)$ im Allgemeinen einen desto grössern Einfluss auf die Bestimmung der Polhöhe ausüben, je grösser $\sin J$ ist, d. h. je näher J einem rechten Winkel oder 90° kommt, und dass dieser Einfluss sich vermindert, wenn J abnimmt. Da nun Fehler der Theilung und Fehler der Ablesung bei jedem winkelmessenden Instrumente zu den am meisten zu fürchtenden Fehlern gehören, und auf der andern Seite das Glied

$$\cos J \sin \varphi \sin (v - \Theta) \sin i$$

der Gleichung 93), welches uns im vorhergehenden Paragraphen zu der in 3. gegebenen Bestimmung führte, wenn man sich nur auf das Niveau verlassen kann, was auch J sein mag, immer wird der Null äusserst nahe gebracht werden können; so wird man offenbar die in 3. gegebene Regel in der Praxis grösstentheils aufzugeben haben, und sich vielmehr der aus dem unmittelbar Vorhergehenden von selbst fließenden Regel näher anzuschliessen suchen müssen. Auf's Neue ergibt sich aber hieraus auch, wie ungemein wichtig es bei der Anwendung unserer Methode ist, dass man für eine sehr genaue Horizontalstellung des Limbus des Theodoliten Sorge trägt, und daher auch bei der Auswahl des Instruments auf Vollkommenheit des Niveaus ganz besonders sein Augenmerk richtet, ohne dass man übrigens natürlich auf Feinheit und Genauigkeit der Theilung, und Vollkommenheit der eine scharfe Ablesung bezweckenden Hilfsmittel weniger zu sehen hat.

5. Endlich ergibt sich aus den Gleichungen 110) und 111), dass man, um sich in allen Fällen vor einem zu grossen Einfluss der Fehler $d\delta$, $d\delta'$, $d\delta''$ und $d(w' - w)$, $d(w'' - w)$ auf die Bestimmung der Polhöhe sicher zu stellen, bei der Auswahl der Sterne ganz vorzüglich darauf zu sehen hat, dass keins der drei Producte

$$\begin{aligned} & 2 \sin(J - \varphi) \sin(J + \varphi) \sin \frac{1}{2}(w - w') \sin \frac{1}{2}(w'' - w), \\ & 2 \sin(J - \varphi) \sin(J + \varphi) \sin \frac{1}{2}(w' - w'') \sin \frac{1}{2}(w - w'), \\ & 2 \sin(J - \varphi) \sin(J + \varphi) \sin \frac{1}{2}(w'' - w) \sin \frac{1}{2}(w' - w'') \end{aligned}$$

der Null sehr nahe kommt, sondern vielmehr ein jedes dieser drei Producte einen möglichst grossen absoluten Werth erhält, wozu eine vorläufige genäherte Kenntniss von J , φ und $w - w'$, $w' - w''$, $w'' - w$ erforderlich ist, die man sich gewiss jederzeit, so weit dieselbe zur Erreichung des vorher näher bezeichneten Zwecks nöthig ist, mit Leichtigkeit zu verschaffen im Stande sein wird.

§. 10.

Indem wir jetzt wieder annehmen, dass das Azimuth ω , die Höhe h , die Polhöhe φ und dann ferner auch die Stundenwinkel σ , σ' , σ'' mittelst der aus §. 4. bekannten Gleichungen

$$112) \begin{cases} \sin \delta = \sin h \sin \varphi - \cos \omega \cos h \cos \varphi, \\ \sin \delta' = \sin h \sin \varphi - \cos \{\omega + (w' - w)\} \cos h \cos \varphi, \\ \sin \delta'' = \sin h \sin \varphi - \cos \{\omega + (w'' - w)\} \cos h \cos \varphi \end{cases}$$

bestimmt worden sind, wollen wir nun noch im Allgemeinen untersuchen, welchen Einfluss Fehler der Declinationen, Fehler der Azimuthaldifferenzen und die nicht völlige Gleichheit der Höhen, in denen die drei Sterne beobachtet worden sind, auf die vorher näher bezeichneten Grössen ausüben.

Zu dem Ende wollen wir, indem immer ω , h , φ als den drei Gleichungen 112) genügend angenommen werden, und dann ferner σ , σ' , σ'' als aus diesen Grössen mittelst bekannter Formeln bestimmt betrachtet werden, die wahren Declinationen der drei Sterne durch

$$\delta + d\delta, \delta' + d\delta', \delta'' + d\delta'';$$

die wahren Azimuthaldifferenzen durch

$$\omega' - \omega + d(\omega' - \omega), \omega'' - \omega + d(\omega'' - \omega);$$

die wahren Höhen, in denen die drei Sterne beobachtet worden sind, durch

$$h + \Delta h, h + \Delta h + dh, h + \Delta h + d_1 h;$$

die wahren Azimuthe und die wahren Stundenwinkel der drei Sterne durch

$$\omega + \Delta\omega, \sigma + \Delta\sigma;$$

$$(\omega' + \Delta\omega', \sigma' + \Delta\sigma';$$

$$\omega'' + \Delta\omega'', \sigma'' + \Delta\sigma'';$$

endlich die wahre Polhöhe durch

$$\varphi + \Delta\varphi$$

bezeichnen. Dann haben wir nach dem Obigen die drei folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 & \sin(\delta + d\delta) \\
 &= \sin(h + \Delta h) \sin(\varphi + \Delta\varphi) \\
 & \quad - \cos(\omega + \Delta\omega) \cos(h + \Delta h) \cos(\varphi + \Delta\varphi), \\
 & \sin(\delta' + d\delta') \\
 &= \sin(h + \Delta h + dh) \sin(\varphi + \Delta\varphi) \\
 & \quad - \cos\{\omega + \Delta\omega + (\omega' - \omega) + d(\omega' - \omega)\} \cos(h + \Delta h + dh) \cos(\varphi + \Delta\varphi), \\
 & \sin(\delta'' + d\delta'') \\
 &= \sin(h + \Delta h + d_1 h) \sin(\varphi + \Delta\varphi) \\
 & \quad - \cos\{\omega + \Delta\omega + (\omega'' - \omega) + d(\omega'' - \omega)\} \cos(h + \Delta h + d_1 h) \cos(\varphi + \Delta\varphi);
 \end{aligned}$$

oder kürzer

$$\begin{aligned}
 & \sin(\delta + d\delta) \\
 &= \sin(h + \Delta h) \sin(\varphi + \Delta\varphi) \\
 & \quad - \cos(\omega + \Delta\omega) \cos(h + \Delta h) \cos(\varphi + \Delta\varphi), \\
 & \sin(\delta' + d\delta') \\
 &= \sin(h + \Delta h + dh) \sin(\varphi + \Delta\varphi) \\
 & \quad - \cos\{\omega' + \Delta\omega + d(\omega' - \omega)\} \cos(h + \Delta h + dh) \cos(\varphi + \Delta\varphi), \\
 & \sin(\delta'' + d\delta'') \\
 &= \sin(h + \Delta h + d_1 h) \sin(\varphi + \Delta\varphi) \\
 & \quad - \{\cos\omega'' + \Delta\omega + d(\omega'' - \omega)\} \cos(h + \Delta h + d_1 h) \cos(\varphi + \Delta\varphi).
 \end{aligned}$$

Betrachtet man nun aber alle Fehler als Differentiale, wie es wegen der Kleinheit der absoluten Werthe derselben mit hinreichender Annäherung verstattet sein wird, so erhalten die vorhergehenden Gleichungen die folgende Form:

$$\begin{aligned}
 & \sin\delta + \cos\delta d\delta \\
 &= \sin h \sin\varphi - \cos\omega \cos h \cos\varphi \\
 & \quad + (\cos h \sin\varphi + \cos\omega \sin h \cos\varphi) \Delta h \\
 & \quad + \sin\omega \cos h \cos\varphi \Delta\omega \\
 & \quad + (\sin h \cos\varphi + \cos\omega \cos h \sin\varphi) \Delta\varphi, \\
 & \sin\delta' + \cos\delta' d\delta' \\
 &= (\cos h \sin\varphi + \cos\omega' \sin h \cos\varphi) dh \\
 & \quad - \sin\omega' \cos h \cos\varphi d(\omega' - \omega) \\
 &= \sin h \sin\varphi - \cos\omega' \cos h \cos\varphi \\
 & \quad + (\cos h \sin\varphi + \cos\omega' \sin h \cos\varphi) \Delta h \\
 & \quad + \sin\omega' \cos h \cos\varphi \Delta\omega \\
 & \quad + (\sin h \cos\varphi + \cos\omega' \cos h \sin\varphi) \Delta\varphi, \\
 & \sin\delta'' + \cos\delta'' d\delta'' \\
 &= (\cos h \sin\varphi + \cos\omega'' \sin h \cos\varphi) d_1 h \\
 & \quad - \sin\omega'' \cos h \cos\varphi d(\omega'' - \omega) \\
 &= \sin h \sin\varphi - \cos\omega'' \cos h \cos\varphi \\
 & \quad + (\cos h \sin\varphi + \cos\omega'' \sin h \cos\varphi) \Delta h \\
 & \quad + \sin\omega'' \cos h \cos\varphi \Delta\omega \\
 & \quad + (\sin h \cos\varphi + \cos\omega'' \cos h \sin\varphi) \Delta\varphi;
 \end{aligned}$$

also, weil nach 112)

$$\sin \delta = \sin h \sin \varphi - \cos \omega \cos h \cos \varphi,$$

$$\sin \delta' = \sin h \sin \varphi - \cos \omega' \cos h \cos \varphi,$$

$$\sin \delta'' = \sin h \sin \varphi - \cos \omega'' \cos h \cos \varphi$$

ist:

$$\cos \delta d\delta = (\cos h \sin \varphi + \cos \omega \sin h \cos \varphi) \Delta h$$

$$+ \sin \omega \cos h \cos \varphi \Delta \omega$$

$$+ (\sin h \cos \varphi + \cos \omega \cos h \sin \varphi) \Delta \varphi,$$

$$\cos \delta' d\delta'$$

$$= (\cos h \sin \varphi + \cos \omega' \sin h \cos \varphi) \Delta h$$

$$+ \sin \omega' \cos h \cos \varphi \Delta \omega'$$

$$+ (\sin h \cos \varphi + \cos \omega' \cos h \sin \varphi) \Delta \varphi,$$

$$\cos \delta'' d\delta''$$

$$= (\cos h \sin \varphi + \cos \omega'' \sin h \cos \varphi) \Delta h$$

$$+ \sin \omega'' \cos h \cos \varphi \Delta \omega''$$

$$+ (\sin h \cos \varphi + \cos \omega'' \cos h \sin \varphi) \Delta \varphi;$$

$$- (\cos h \sin \varphi + \cos \omega' \sin h \cos \varphi) d_1 h$$

$$- \sin \omega' \cos h \cos \varphi d(\omega' - \omega)$$

$$= (\cos h \sin \varphi + \cos \omega'' \sin h \cos \varphi) \Delta h$$

$$+ \sin \omega'' \cos h \cos \varphi \Delta \omega''$$

$$+ (\sin h \cos \varphi + \cos \omega'' \cos h \sin \varphi) \Delta \varphi;$$

oder der Kürze wegen

$$A = a \Delta h + b \Delta \omega + c \Delta \varphi,$$

$$A' = a' \Delta h + b' \Delta \omega + c' \Delta \varphi,$$

$$A'' = a'' \Delta h + b'' \Delta \omega + c'' \Delta \varphi;$$

wo

$$A = \cos \delta d\delta,$$

$$A' = \cos \delta' d\delta'$$

$$= (\cos h \sin \varphi + \cos \omega' \sin h \cos \varphi) dh$$

$$- \sin \omega' \cos h \cos \varphi d(\omega' - \omega),$$

$$A'' = \cos \delta'' d\delta''$$

$$= (\cos h \sin \varphi + \cos \omega'' \sin h \cos \varphi) d_1 h$$

$$- \sin \omega'' \cos h \cos \varphi d(\omega'' - \omega)$$

ist, und die Bedeutung der Symbole

$$a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''$$

von selbst erhellet.

Durch Elimination von $\Delta \omega$ erhält man

$$Ab' - A'b = (ab' - a'b) \Delta h + (cb' - c'b) \Delta \varphi,$$

$$Ab'' - A''b = (ab'' - a''b) \Delta h + (cb'' - c''b) \Delta \varphi;$$

also, wie man auf ganz ähnliche Art wie in §. 8. findet:

$$\frac{A \sin \omega' \pm A' \sin \omega}{2 \sin \frac{1}{2} (\omega - \omega')}$$

$$= \{ \cos h \sin \varphi \cos \frac{1}{2} (\omega + \omega') + \sin h \cos \varphi \cos \frac{1}{2} (\omega - \omega') \} \Delta h$$

$$+ \{ \sin h \cos \varphi \cos \frac{1}{2} (\omega + \omega') + \cos h \sin \varphi \cos \frac{1}{2} (\omega - \omega') \} \Delta \varphi,$$

$$= \frac{A \sin \omega'' - A'' \sin \omega}{2 \sin \frac{1}{2}(\omega - \omega'')} \\ = \{ \cos h \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(\omega + \omega'') + \sin h \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(\omega - \omega'') \} \Delta h \\ + \{ \sin h \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(\omega + \omega'') + \cos h \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(\omega - \omega'') \} \Delta \varphi;$$

und hieraus ergiebt sich dann weiter auf ganz ähnliche Art wie in §. 8.

$$114) \Delta \varphi = \\ - \frac{\cos h \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(\omega' + \omega'') + \sin h \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(\omega' - \omega'')}{2 \sin(h - \varphi) \sin(h + \varphi) \sin \frac{1}{2}(\omega - \omega') \sin \frac{1}{2}(\omega'' - \omega)} A \\ - \frac{\cos h \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(\omega'' + \omega) + \sin h \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(\omega'' - \omega)}{2 \sin(h - \varphi) \sin(h + \varphi) \sin \frac{1}{2}(\omega' - \omega'') \sin \frac{1}{2}(\omega - \omega')} A' \\ - \frac{\cos h \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(\omega + \omega') + \sin h \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(\omega - \omega')}{2 \sin(h - \varphi) \sin(h + \varphi) \sin \frac{1}{2}(\omega'' - \omega) \sin \frac{1}{2}(\omega' - \omega'')} A''$$

oder der Kürze wegen

$$115) \Delta \varphi = EA + E'A' + E''A'';$$

und

$$116) \Delta h = \\ \frac{\sin h \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(\omega' + \omega'') + \cos h \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(\omega' - \omega'')}{2 \sin(h - \varphi) \sin(h + \varphi) \sin \frac{1}{2}(\omega - \omega') \sin \frac{1}{2}(\omega'' - \omega)} A \\ + \frac{\sin h \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(\omega'' + \omega) + \cos h \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(\omega'' - \omega)}{2 \sin(h - \varphi) \sin(h + \varphi) \sin \frac{1}{2}(\omega' - \omega'') \sin \frac{1}{2}(\omega - \omega')} A' \\ + \frac{\sin h \cos \varphi \cos \frac{1}{2}(\omega + \omega') + \cos h \sin \varphi \cos \frac{1}{2}(\omega - \omega')}{2 \sin(h - \varphi) \sin(h + \varphi) \sin \frac{1}{2}(\omega'' - \omega) \sin \frac{1}{2}(\omega' - \omega'')} A''$$

oder der Kürze wegen

$$117) \Delta h = E_1 A + E'_1 A' + E''_1 A''.$$

Nach dem Obigen haben wir nun ferner die drei Gleichungen

$$b \Delta \omega = A - a \Delta h - c \Delta \varphi, \\ b' \Delta \omega = A' - a' \Delta h - c' \Delta \varphi, \\ b'' \Delta \omega = A'' - a'' \Delta h - c'' \Delta \varphi;$$

aus denen sich, wenn man sie nach der Reihe mit $\lambda, \lambda', \lambda''$ multiplicirt und dann zu einander addirt, die Gleichung

$$(b\lambda + b'\lambda' + b''\lambda'') \Delta \omega = A\lambda + A'\lambda' + A''\lambda''$$

$$- (a\lambda + a'\lambda' + a''\lambda'') \Delta h$$

$$- (c\lambda + c'\lambda' + c''\lambda'') \Delta \varphi$$

ergiebt. Bestimmt man nun die Factoren $\lambda, \lambda', \lambda''$ so, dass den beiden Gleichungen

$$a\lambda + a'\lambda' + a''\lambda'' = 0, \\ c\lambda + c'\lambda' + c''\lambda'' = 0$$

genügt wird, so ist

$$\Delta \omega = \frac{A\lambda + A'\lambda' + A''\lambda''}{b\lambda + b'\lambda' + b''\lambda''}$$

Aus den beiden vorhergehenden Gleichungen ergibt sich aber

$$\begin{cases} a + a' \frac{\lambda'}{\lambda} + a'' \frac{\lambda''}{\lambda} = 0, \\ c + c' \frac{\lambda'}{\lambda} + c'' \frac{\lambda''}{\lambda} = 0; \end{cases}$$

also, wie man leicht findet,

$$\lambda = \frac{a''c - ac''}{a'c - a''c'} = \dots$$

$$\lambda' = \frac{a''c' - a'c}{a'c'' - a''c} = \dots$$

Daher kann man

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{a''c' - a'c}{a'c'' - a''c}, \\ \lambda' &= \frac{a''c - ac''}{a'c - a''c'}, \\ \lambda'' &= \frac{ac' - a'c}{a'c'' - a''c} \end{aligned}$$

setzen. Weil nun nach dem Obigen

$$a = \cosh h \sin \varphi + \cos \omega \sin h \cos \varphi,$$

$$a' = \cosh h \sin \varphi + \cos \omega' \sin h \cos \varphi,$$

$$a'' = \cosh h \sin \varphi + \cos \omega'' \sin h \cos \varphi$$

und

$$c = \sinh h \cos \varphi + \cos \omega \cosh h \sin \varphi,$$

$$c' = \sinh h \cos \varphi + \cos \omega' \cosh h \sin \varphi,$$

$$c'' = \sinh h \cos \varphi + \cos \omega'' \cosh h \sin \varphi$$

ist; so ist, wie man leicht findet:

$$\lambda = \sin(h - \varphi) \sin(h + \varphi) (\cos \omega' - \cos \omega''),$$

$$\lambda' = \sin(h - \varphi) \sin(h + \varphi) (\cos \omega'' - \cos \omega),$$

$$\lambda'' = \sin(h - \varphi) \sin(h + \varphi) (\cos \omega - \cos \omega')$$

oder

$$\lambda = -2 \sin(h - \varphi) \sin(h + \varphi) \sin \frac{1}{2}(\omega' - \omega'') \sin \frac{1}{2}(\omega' + \omega''),$$

$$\lambda' = -2 \sin(h - \varphi) \sin(h + \varphi) \sin \frac{1}{2}(\omega'' - \omega) \sin \frac{1}{2}(\omega'' + \omega),$$

$$\lambda'' = -2 \sin(h - \varphi) \sin(h + \varphi) \sin \frac{1}{2}(\omega - \omega') \sin \frac{1}{2}(\omega + \omega').$$

Weil nun ferner nach dem Obigen

$$b = \sin \omega \cosh h \cos \varphi,$$

$$b' = \sin \omega' \cosh h \cos \varphi,$$

$$b'' = \sin \omega'' \cosh h \cos \varphi$$

ist, so ist

$$b\lambda + b'\lambda' + b''\lambda''$$

$$= \cosh h \cos \varphi \sin(h - \varphi) \sin(h + \varphi) \left\{ \begin{aligned} &\sin \omega \cos \omega' - \cos \omega \sin \omega' \\ &+ \sin \omega' \cos \omega'' - \cos \omega' \sin \omega'' \\ &+ \sin \omega'' \cos \omega - \cos \omega'' \sin \omega \end{aligned} \right\}$$

$$= \cosh h \cos \varphi \sin(h - \varphi) \sin(h + \varphi) \{ \sin(\omega - \omega') + \sin(\omega' - \omega'') + \sin(\omega'' - \omega) \}$$

$$= -4 \cosh h \cos \varphi \sin(h - \varphi) \sin(h + \varphi)$$

$$\times \sin \frac{1}{2}(\omega - \omega') \sin \frac{1}{2}(\omega' - \omega'') \sin \frac{1}{2}(\omega'' - \omega).$$

Auch ist nach dem Obigen

$$A\lambda + A'\lambda' + A''\lambda'' \\ = -2 \sin(h - \varphi) \sin(h + \varphi) \left\{ \begin{aligned} &A \sin \frac{1}{2}(\omega' - \omega'') \sin \frac{1}{2}(\omega' + \omega'') \\ &+ A' \sin \frac{1}{2}(\omega'' - \omega) \sin \frac{1}{2}(\omega'' + \omega) \\ &+ A'' \sin \frac{1}{2}(\omega - \omega') \sin \frac{1}{2}(\omega + \omega') \end{aligned} \right\}.$$

Also ist

$$118) \Delta\omega = \frac{\sin \frac{1}{2}(\omega' + \omega'')}{2 \cos h \cos \varphi \sin \frac{1}{2}(\omega - \omega') \sin \frac{1}{2}(\omega'' - \omega)} A \\ + \frac{\sin \frac{1}{2}(\omega'' + \omega)}{2 \cos h \cos \varphi \sin \frac{1}{2}(\omega' - \omega'') \sin \frac{1}{2}(\omega - \omega')} A' \\ + \frac{\sin \frac{1}{2}(\omega + \omega')}{2 \cos h \cos \varphi \sin \frac{1}{2}(\omega'' - \omega) \sin \frac{1}{2}(\omega' - \omega'')} A'',$$

oder der Kürze wegen

$$119) \Delta\omega = E_2 A + E'_2 A' + E''_2 A'.$$

Aus $\Delta\omega$ findet man $\Delta\omega'$ und $\Delta\omega''$ leicht mittelst der Formeln

$$120) \begin{cases} \Delta\omega' = \Delta\omega + d(\omega' - \omega), \\ \Delta\omega'' = \Delta\omega + d(\omega'' - \omega). \end{cases}$$

Endlich haben wir nach 6) die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin \sigma \cos \delta &= \sin \omega \cos h, \\ \sin \sigma' \cos \delta' &= \sin \omega' \cos h, \\ \sin \sigma'' \cos \delta'' &= \sin \omega'' \cos h \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \sin(\sigma + \Delta\sigma) \cos(\delta + d\delta) &= \sin(\omega + \Delta\omega) \cos(h + \Delta h), \\ \sin(\sigma' + \Delta\sigma') \cos(\delta' + d\delta') &= \sin(\omega' + \Delta\omega') \cos(h + \Delta h + dh), \\ \sin(\sigma'' + \Delta\sigma'') \cos(\delta'' + d\delta'') &= \sin(\omega'' + \Delta\omega'') \cos(h + \Delta h + d_1 h); \end{aligned}$$

aus denen sich nach den Principien der Differentialrechnung sehr leicht die folgenden Ausdrücke von

$$\Delta\sigma, \Delta\sigma', \Delta\sigma''$$

ergeben:

$$\begin{aligned}
 \Delta\sigma &= \text{tang } \sigma \text{ tang } \delta d\delta \\
 &+ \frac{\cos \omega \cos h}{\cos \sigma \cos \delta} \Delta\omega \\
 &- \frac{\sin \omega \sin h}{\cos \sigma \cos \delta} \Delta h, \\
 \Delta\sigma' &= \text{tang } \sigma' \text{ tang } \delta' d\delta' \\
 &+ \frac{\cos \omega' \cos h}{\cos \sigma' \cos \delta'} \Delta\omega' \\
 &- \frac{\sin \omega' \sin h}{\cos \sigma' \cos \delta'} (\Delta h + dh), \\
 \Delta\sigma'' &= \text{tang } \sigma'' \text{ tang } \delta'' d\delta'' \\
 &+ \frac{\cos \omega'' \cos h}{\cos \sigma'' \cos \delta''} \Delta\omega'' \\
 &- \frac{\sin \omega'' \sin h}{\cos \sigma'' \cos \delta''} (\Delta h + d_1 h).
 \end{aligned}$$

Führt man nun nur in die sämtlichen vorher entwickelten Formeln die aus 113) bekannten Werthe von A , A' , A'' , ein, so kann man ohne die geringste Schwierigkeit die sämtlichen Fehler

$$\Delta\varphi, \Delta h; \\
 \Delta\omega, \Delta\omega', \Delta\omega''; \\
 \Delta\sigma, \Delta\sigma', \Delta\sigma''$$

bloss durch

$$d\delta, d\delta', d\delta''; dh, d_1 h; d(\omega' - \omega), d(\omega'' - \omega)$$

ausdrücken; und man sollte in keinem Falle unterlassen, diese Ausdrücke der Fehler

$$\Delta\varphi, \Delta h; \\
 \Delta\omega, \Delta\omega', \Delta\omega''; \\
 \Delta\sigma, \Delta\sigma', \Delta\sigma''$$

zu entwickeln, weil man sich nur auf diese Weise ein Urtheil über den Grad der erreichten Genauigkeit zu bilden im Stande ist.

Aus den vorhergehenden Formeln lassen sich auch leicht Regeln zur vortheilhaftesten Anordnung der Beobachtungen abstrahiren, worüber jedoch hier weitere Erläuterungen beizubringen wir um so eher unterlassen können, weil schon im vorhergehenden Paragraphen wenigstens in Beziehung auf die Bestimmung der Polhöhe die nöthigen Andeutungen über diesen wichtigen Gegenstand gegeben worden sind.

Die Coefficienten

$$E, E', E''; E_1, E'_1, E''_1;$$

welche nebst den Coefficienten E_2, E'_2, E''_2 bei dieser Entwicklung von besonderer Bedeutung sind, berechnet man am leichtesten auf folgende Art.

Es ist, wie man leicht findet:

$$122) \begin{cases} E + E_1 = -\frac{\sin \frac{1}{2} \omega' \sin \frac{1}{2} \omega''}{\sin(h + \varphi) \sin \frac{1}{2}(\omega - \omega') \sin \frac{1}{2}(\omega'' - \omega)}, \\ E - E_1 = -\frac{\cos \frac{1}{2} \omega' \cos \frac{1}{2} \omega''}{\sin(h - \varphi) \sin \frac{1}{2}(\omega - \omega') \sin \frac{1}{2}(\omega'' - \omega)}; \end{cases}$$

so wie

$$123) \begin{cases} E' + E'_1 = -\frac{\sin \frac{1}{2} \omega'' \sin \frac{1}{2} \omega}{\sin(h + \varphi) \sin \frac{1}{2}(\omega' - \omega'') \sin \frac{1}{2}(\omega - \omega')}, \\ E' - E'_1 = -\frac{\cos \frac{1}{2} \omega'' \cos \frac{1}{2} \omega}{\sin(h - \varphi) \sin \frac{1}{2}(\omega' - \omega'') \sin \frac{1}{2}(\omega - \omega')}; \end{cases}$$

und

$$124) \begin{cases} E'' + E''_1 = -\frac{\sin \frac{1}{2} \omega \sin \frac{1}{2} \omega'}{\sin(h + \varphi) \sin \frac{1}{2}(\omega'' - \omega) \sin \frac{1}{2}(\omega' - \omega'')}, \\ E'' - E''_1 = -\frac{\cos \frac{1}{2} \omega \cos \frac{1}{2} \omega'}{\sin(h - \varphi) \sin \frac{1}{2}(\omega'' - \omega) \sin \frac{1}{2}(\omega' - \omega'')}; \end{cases}$$

mittelst welcher Formeln sich die Summen

$$E + E_1, E' + E'_1, E'' + E''_1$$

und die Differenzen

$$E - E_1, E' - E'_1, E'' - E''_1$$

leicht durch Logarithmen berechnen lassen. Die Coefficienten

$$E, E', E''; E_1, E'_1, E''_1$$

findet man aber dann ohne alle Schwierigkeit mittelst der Formeln

$$125) \begin{cases} E = \frac{1}{2} \{ (E + E_1) + (E - E_1) \}, \\ E' = \frac{1}{2} \{ (E' + E'_1) + (E' - E'_1) \}, \\ E'' = \frac{1}{2} \{ (E'' + E''_1) + (E'' - E''_1) \} \end{cases}$$

und

$$126) \begin{cases} E_1 = \frac{1}{2} \{ (E + E_1) - (E - E_1) \}, \\ E'_1 = \frac{1}{2} \{ (E' + E'_1) - (E' - E'_1) \}, \\ E''_1 = \frac{1}{2} \{ (E'' + E''_1) - (E'' - E''_1) \}. \end{cases}$$

Um die beiden Grössen

$$\begin{aligned} \cos h \sin \varphi + \cos \omega' \sin h \cos \varphi, \\ \cos h \sin \varphi + \cos \omega'' \sin h \cos \varphi, \end{aligned}$$

von denen die Grössen A' und A'' abhängen, mit Leichtigkeit zu berechnen, führt man am besten ein Paar Hülfswinkel ψ und ψ'' ein, welche man mittelst der Formeln

$$127) \begin{cases} \tan \psi' = \cos \omega' \tan h, \\ \tan \psi'' = \cos \omega'' \tan h \end{cases}$$

berechnet. Dann ist nämlich, wie man leicht findet:

$$128) \begin{cases} \cos h \sin \varphi + \cos \omega' \sin h \cos \varphi \\ \quad = \frac{\cos h \sin (\varphi + \psi')}{\cos \psi'} , \\ \cos h \sin \varphi + \cos \omega'' \sin h \cos \varphi \\ \quad = \frac{\cos h \sin (\varphi + \psi'')}{\cos \psi''} . \end{cases}$$

§. 11.

Wir wollen jetzt annehmen, dass man mehr als drei Sterne, überhaupt eine grössere Anzahl von Sternen, deren Declinationen

$$\delta, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \dots$$

sein mögen, in gleichen Höhen beobachtet und die Differenzen der entsprechenden Azimuthe gemessen habe. Hat man dann aus dreien dieser Beobachtungen nach der im Vorhergehenden gegebenen Anleitung die Näherungswerthe φ, h, ω der Polhöhe, der gemeinschaftlichen Höhe der Sterne, und des Azimuths eines derselben, welchen wir als den ersten annehmen wollen, hergeleitet; so kann man mittelst der Methode der kleinsten Quadrate die Verbesserungen $\Delta\varphi, \Delta h, \Delta\omega$ dieser Elemente auf folgende Art finden.

Nach 6) ist bekanntlich

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \sin(h + \Delta h) \sin(\varphi + \Delta\varphi) \\ &\quad - \cos(\omega + \Delta\omega) \cos(h + \Delta h) \cos(\varphi + \Delta\varphi), \end{aligned}$$

und folglich nach den Principien der Differentialrechnung

$$\begin{aligned} 0 &= (\sin h \sin \varphi - \cos \omega \cos h \cos \varphi) - \sin \delta \\ &\quad + (\sin h \cos \varphi + \cos \omega \cos h \sin \varphi) \Delta\varphi \\ &\quad + (\cos h \sin \varphi + \cos \omega \sin h \cos \varphi) \Delta h \\ &\quad + \sin \omega \cos h \cos \varphi \Delta\omega. \end{aligned}$$

Bezeichnet man nun die gemessenen Azimuthaldifferenzen, welche man erhält, wenn man das Azimuth des ersten Sterns von den Azimuthen aller übrigen Sterne abzieht, durch

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \dots,$$

so sind

$$129) \begin{cases} \omega_1 = \omega + \varepsilon_1, \\ \omega_2 = \omega + \varepsilon_2, \\ \omega_3 = \omega + \varepsilon_3, \\ \omega_4 = \omega + \varepsilon_4, \\ \omega_5 = \omega + \varepsilon_5, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Näherungswerthe der Azimuthe aller auf den ersten folgenden Sterne, und offenbar ist bei dieser Betrachtung

$$\Delta\omega = \Delta\omega_1 = \Delta\omega_2 = \Delta\omega_3 = \Delta\omega_4 = \dots$$

zu setzen.

Setzt man nun

$$130) \begin{cases} \sin \delta' = \sin h \sin \varphi - \cos \omega \cos h \cos \varphi, \\ \sin \delta'_1 = \sin h \sin \varphi - \cos \omega_1 \cos h \cos \varphi, \\ \sin \delta'_2 = \sin h \sin \varphi - \cos \omega_2 \cos h \cos \varphi, \\ \sin \delta'_3 = \sin h \sin \varphi - \cos \omega_3 \cos h \cos \varphi, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

und

$$131) \begin{cases} a = 2 \sin \frac{1}{2} (\delta' - \delta) \cos \frac{1}{2} (\delta' + \delta), \\ a_1 = 2 \sin \frac{1}{2} (\delta'_1 - \delta_1) \cos \frac{1}{2} (\delta'_1 + \delta_1), \\ a_2 = 2 \sin \frac{1}{2} (\delta'_2 - \delta_2) \cos \frac{1}{2} (\delta'_2 + \delta_2), \\ a_3 = 2 \sin \frac{1}{2} (\delta'_3 - \delta_3) \cos \frac{1}{2} (\delta'_3 + \delta_3), \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

ferner

$$132) \begin{cases} b = \sin h \cos \varphi + \cos \omega \cos h \sin \varphi, \\ b_1 = \sin h \cos \varphi + \cos \omega_1 \cos h \sin \varphi, \\ b_2 = \sin h \cos \varphi + \cos \omega_2 \cos h \sin \varphi, \\ b_3 = \sin h \cos \varphi + \cos \omega_3 \cos h \sin \varphi, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

und

$$133) \begin{cases} c = \cos h \sin \varphi + \cos \omega \sin h \cos \varphi, \\ c_1 = \cos h \sin \varphi + \cos \omega_1 \sin h \cos \varphi, \\ c_2 = \cos h \sin \varphi + \cos \omega_2 \sin h \cos \varphi, \\ c_3 = \cos h \sin \varphi + \cos \omega_3 \sin h \cos \varphi, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

endlich

$$134) \begin{cases} d = \sin \omega \cos h \cos \varphi, \\ d_1 = \sin \omega_1 \cos h \cos \varphi, \\ d_2 = \sin \omega_2 \cos h \cos \varphi, \\ d_3 = \sin \omega_3 \cos h \cos \varphi, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

so hat man nach dem Obigen die folgenden Gleichungen:

$$135) \begin{cases} a + b \Delta \varphi + c \Delta h + d \Delta \omega = 0, \\ a_1 + b_1 \Delta \varphi + c_1 \Delta h + d_1 \Delta \omega = 0, \\ a_2 + b_2 \Delta \varphi + c_2 \Delta h + d_2 \Delta \omega = 0, \\ a_3 + b_3 \Delta \varphi + c_3 \Delta h + d_3 \Delta \omega = 0, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

welche man nach der Methode der kleinsten Quadrate auflösen muss.

Um die durch

$\delta', \delta'_1, \delta'_2, \delta'_3, \delta'_4, \dots$
bezeichneten Grössen mit Leichtigkeit finden zu können, berechnet man am besten die Hülfswinkel

$$\Theta, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4, \dots$$

mittelst der Formeln

$$136) \begin{cases} \operatorname{tang} \Theta = \cos \omega \cot h, \\ \operatorname{tang} \Theta_1 = \cos \omega_1 \cot h, \\ \operatorname{tang} \Theta_2 = \cos \omega_2 \cot h, \\ \operatorname{tang} \Theta_3 = \cos \omega_3 \cot h, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Dann ist, wie man leicht findet:

$$137) \begin{cases} \sin \delta' = \frac{\sin h \sin (\varphi - \Theta)}{\cos \Theta}, \\ \sin \delta'_1 = \frac{\sin h \sin (\varphi - \Theta_1)}{\cos \Theta_1}, \\ \sin \delta'_2 = \frac{\sin h \sin (\varphi - \Theta_2)}{\cos \Theta_2}, \\ \sin \delta'_3 = \frac{\sin h \sin (\varphi - \Theta_3)}{\cos \Theta_3}, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Die Coefficienten

und $b, b_1, b_2, b_3, b_4, \dots$
 $c, c_1, c_2, c_3, c_4, \dots$

kann man bequem auf folgende Art berechnen.

Nach 132) und 133) ist

$$138) \begin{cases} b + c = 2 \cos \frac{1}{2} \omega^2 \sin (h + \varphi), \\ b_1 + c_1 = 2 \cos \frac{1}{2} \omega_1^2 \sin (h + \varphi), \\ b_2 + c_2 = 2 \cos \frac{1}{2} \omega_2^2 \sin (h + \varphi), \\ b_3 + c_3 = 2 \cos \frac{1}{2} \omega_3^2 \sin (h + \varphi), \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

und

$$139) \begin{cases} b - c = 2 \sin \frac{1}{2} \omega^2 \sin (h - \varphi), \\ b_1 - c_1 = 2 \sin \frac{1}{2} \omega_1^2 \sin (h - \varphi), \\ b_2 - c_2 = 2 \sin \frac{1}{2} \omega_2^2 \sin (h - \varphi), \\ b_3 - c_3 = 2 \sin \frac{1}{2} \omega_3^2 \sin (h - \varphi), \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

also

$$140) \begin{cases} b = \frac{1}{2} \{ (b + c) + (b - c) \}, \\ b_1 = \frac{1}{2} \{ (b_1 + c_1) + (b_1 - c_1) \}, \\ b_2 = \frac{1}{2} \{ (b_2 + c_2) + (b_2 - c_2) \}, \\ b_3 = \frac{1}{2} \{ (b_3 + c_3) + (b_3 - c_3) \}, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

und

$$141) \begin{cases} c = \frac{1}{2} \{ (b + c) - (b - c) \}, \\ c_1 = \frac{1}{2} \{ (b_1 + c_1) - (b_1 - c_1) \}, \\ c_2 = \frac{1}{2} \{ (b_2 + c_2) - (b_2 - c_2) \}, \\ c_3 = \frac{1}{2} \{ (b_3 + c_3) - (b_3 - c_3) \}, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Die obigen Ausdrücke von

$$a, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$$

und

$$d, d_1, d_2, d_3, d_4, \dots$$

gestatten schon an sich eine sehr bequeme Berechnung durch Logarithmen.

§. 12.

Vor den Beobachtungen muss man jederzeit eine zweckmässige Auswahl der bei denselben anzuwendenden Sterne treffen und vorläufig die Zeiten, wo dieselben gleiche Höhen erreichen, bestimmen, wozu natürlich eine genäherte Kenntniss der Polhöhe erforderlich ist. Am bequemsten und mit einer für den beabsichtigten Zweck hinreichenden Genauigkeit wird man sich hierbei eines Himmelsglobus bedienen, kann aber auch das folgende von Anger in der trefflichen Schrift: Ueber die sicherste Bestimmung der geographischen Breite aus Beobachtungen mit einem Spiegelsextanten oder ähnlichen Instrumente. Von C. T. Anger. (Neueste Schriften der naturforschenden Gesellschaft in Danzig. Dritten Bandes erstes Heft.) Königsberg. 1835. S. 14. vorgeschlagene Verfahren zweckmässig in Anwendung bringen.

Mit einer genäherten Polhöhe berechne man für volle Stunden die Höhen solcher Sterne, welche in der Jahreszeit, in welcher man beobachtet, nach Sonnenuntergang anfangen sichtbar zu werden. Hierauf trage man die Sternzeiten als Abscissen auf eine gerade Linie auf, wobei man den Maassstab nur so gross annimmt, dass sich noch Intervalle von fünf Zeitminuten leicht und sicher erkennen lassen, und setze nach einem Maassstabe, welcher noch Zehntheile eines Grades zu unterscheiden gestattet, die berechneten Höhen als senkrechte Ordinaten ab, deren Endpunkte man dann für jeden einzelnen Stern durch stetige Curven, die man aus freier Hand zieht, mit einander verbindet. Auf diese Weise wird es sehr leicht, die Zeiten vor auszubestimmen, zu denen die eingetragenen Sterne gleiche Höhen erreichen, indem man bloss diese Curven in gewissen Punkten schneidende, der Abscissenaxe parallele gerade Linien zu ziehen, und von den in Rede stehenden Durchschnittspunkten auf die Abscissenaxe Perpendikel zu fällen braucht, deren Fusspunkte dann durch die ihnen entsprechenden Abscissen die gesuchten Zeiten, wo die in Rechnung genommenen Sterne zu gleichen Höhen gelangen, mit einer für den beabsichtigten Zweck hinreichenden Genauigkeit bestimmen.

Jedenfalls hat man sich, wenn dies irgend möglich ist, nur der sogenannten Fundamentalsterne zu bedienen, da deren Positionen auf der Sphäre mit der grössten Genauigkeit bekannt sind. Die Rectascensionen und Declinationen dieser Sterne nimmt man für die Tage, an denen man die Beobachtungen anstellt, am besten aus dem Berliner astronomischen Jahrbuche. Am Ende der vorliegenden Schrift findet man die mittlern Rectascensionen (in Zeit) und Declinationen dieser Hauptsterne für den Anfang des Jahres 1844 nebst den jährlichen Veränderungen der in Rede stehenden beiden Elemente.

§. 13.

Zum Schluss wollen wir nun noch zeigen, wie man für einen Punkt auf der Erdoberfläche die sogenannte geocentrische Breite und den nach diesem Punkte gezogenen Erdradius aus der Polhöhe des in Rede stehenden Punktes finden kann.

Der Halbmesser des Erdäquators sei a , die halbe Erdaxe sei b ; so ist

$$142) \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

die Gleichung des durch den in Rede stehenden Punkt der Erdoberfläche gelegten Erdmeridians, wobei ohne weitere Erläuterung sogleich erhellen wird, wie das Coordinatensystem der xy angenommen worden ist.

Bezeichnen nun x, y die Coordinaten des in Rede stehenden Punktes der Erdoberfläche, so ist nach den Principien der höheren Geometrie

$$143) z - y = -\frac{dx}{dy}(u - x)$$

die Gleichung der durch diesen Punkt gezogenen Normale des Erdsphäroids, und folglich, da bekanntlich die Polhöhe φ der Neigungswinkel dieser Normale gegen die Ebene des Erdäquators ist, wenn wir, was offenbar verstattet ist, annehmen, dass die Coordinaten x, y beide positiv sind:

$$144) \tan \varphi = \pm \frac{dx}{dy}$$

Bezeichnen wir aber die sogenannte geocentrische Breite des in Rede stehenden Punktes der Erdoberfläche, worunter man den, jenachdem dieser Punkt in der nördlichen oder südlichen Hälfte der Erdoberfläche liegt, positiv oder negativ genommenen Neigungswinkel des nach dem in Rede stehenden Punkte gezogenen Erdhalbmessers r gegen die Ebene des Erdäquators versteht, durch φ_1 , so ist offenbar

$$145) \tan \varphi_1 = \pm \frac{y}{x},$$

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem der Punkt der Erdoberfläche, dessen geocentrische Breite φ_1 ist, in der nördlichen oder südlichen Hälfte der Erdoberfläche liegt. Also ist nach dem Vorhergehenden

$$146) \frac{\tan \varphi_1}{\tan \varphi} = \mp \frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Aus der Gleichung 142) folgt aber durch Differentiation

$$-\frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Also ist nach 146)

$$147) \frac{\tan \varphi_1}{\tan \varphi} = \pm \frac{b^2}{a^2}, \quad \tan \varphi_1 = \pm \frac{b^2}{a^2} \tan \varphi.$$

Setzt man die sogenannte Abplattung $\frac{a-b}{a} = n$, so ist $\frac{b}{a} = 1 - n$, und folglich

$$148) \tan \varphi_1 = \pm (1-n)^2 \tan \varphi,$$

immer das obere oder untere Zeichen genommen, jenachdem der Punkt, dessen geocentrische Breite φ_1 ist, in der nördlichen oder südlichen Hälfte der Erdoberfläche liegt.

Den nach dem in Rede stehenden Punkte der Erdoberfläche gezogenen Erdhalbmesser r kann man nun ferner auf folgende Art finden. Weil nach 145)

$$y = \pm x \tan \varphi_1$$

ist, so ist nach 142)

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x \tan \varphi_1}{b}\right)^2 = 1,$$

und folglich

$$x^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \tan^2 \varphi_1 + b^2} = \frac{a^2 b^2 \cos^2 \varphi_1}{a^2 \sin^2 \varphi_1 + b^2 \cos^2 \varphi_1}.$$

Nun ist aber

$$r^2 = x^2 + y^2 = x^2 (1 + \tan^2 \varphi_1) = x^2 \sec^2 \varphi_1 = \frac{x^2}{\cos^2 \varphi_1}.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden

$$149) r = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi_1 + b^2 \cos^2 \varphi_1}}.$$

Auch ist

$$r^2 = \frac{a^2}{\cos^2 \varphi_1 + \frac{a^2}{b^2} \sin^2 \varphi_1}.$$

Nun ist aber nach 147)

$$\frac{a^2}{b^2} = \pm \frac{\tan \varphi}{\tan \varphi_1} = \pm \frac{\sin \varphi \cos \varphi_1}{\cos \varphi \sin \varphi_1},$$

und folglich

$$\cos \varphi_1^2 + \frac{a^2}{b^2} \sin \varphi_1^2 = \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi} (\cos \varphi \cos \varphi_1 \pm \sin \varphi \sin \varphi_1),$$

d. i.

$$\cos \varphi_1^2 + \frac{a^2}{b^2} \sin \varphi_1^2 = \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi} \cos (\varphi \mp \varphi_1).$$

Also ist nach dem Obigen

$$150) \quad r = a \sqrt{\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_1 \cos (\varphi \mp \varphi_1)}}.$$

Mittelst dieser Formeln können φ_1 und r leicht berechnet werden.

Namen	Min. A. R.	Min. D. R.	Veränd.
α Coronae	15 28	3 2019	+ 23 14 32, 70
β Urs. min.	14 21 13	0 2574	+ 24 47 33, 96
γ Urs. min.	14 42 12	3 3019	- 13 23 23, 13
δ Urs. min.	14 42 4	3 3030	- 12 20 42, 09
α Bootis	14 8 32	3 2326	+ 19 29 49, 83
γ Urs. maj.	13 41 23	3 3764	+ 20 2 37, 29
α Virginis	13 16 28	3 1481	- 10 20 43, 90
γ Urs. maj.	11 42 36	3 2033	+ 24 33 42, 22
β Virginis	11 42 34	3 1243	+ 2 38 32, 28
δ Leonis	11 41 2	3 0023	+ 12 20 37, 94
α Urs. maj.	10 24 2	3 2836	+ 02 32 29, 60
α Leonis	10 0 3	3 2030	+ 12 43 37, 17
α Hydrae	9 19 22	3 0471	- 7 29 9, 02
β Gemini	7 32 42	3 0822	+ 28 23 20, 02
α Cam. min.	7 31 7	3 1462	+ 2 37 9, 42
α Gemini	7 24 37	3 2406	+ 22 12 20, 96
α Can. maj.	6 38 16	3 0442	- 16 30 22, 23
α Orion	3 46 43	3 2429	+ 7 22 19, 25
β Tauri	2 16 26	3 2874	+ 28 28 7, 94
β Orion	2 7 2	3 2371	+ 8 23 13, 29
α Aurigae	2 10 42	4 4174	+ 12 40 24, 84
α Tauri	4 36 28	3 4319	+ 16 11 24, 40
α Persei	3 13 13	4 2366	+ 19 18 0, 90
α Ceti	2 24 7	3 1221	+ 3 25 24, 24
α Arietis	1 22 23	3 3603	+ 22 43 48, 02
α Cassiope	0 31 41	3 3477	+ 25 40 20, 16

Mittlere Oerter der Hauptsterne für 1844 nebst den jährlichen Veränderungen.

Namen.	Mittl. A. R.	Jährl. Veränd.	Mittl. Decl.	Jährl. Veränd.
α Andromed.	0 ^h 0' 20",024	+ 3",0811	+ 28° 13' 44",33	+ 19",956
γ Pegasi	0 5 12,578	+ 3,0809	+ 14 18 56,86	+ 20,025
α Cassiop.	0 31 41,481	+ 3,3477	+ 55 40 50,16	+ 19,816
α Arietis	1 58 23,430	+ 3,3603	+ 22 43 18,02	+ 17,292
α Ceti	2 54 7,771	+ 3,1251	+ 3 28 24,54	+ 14,415
α Persei	3 13 13,031	+ 4,2366	+ 49 18 0,60	+ 13,291
α Tauri	4 26 58,491	+ 3,4319	+ 16 11 24,40	+ 7,747
α Aurigae	5 5 10,421	+ 4,4174	+ 45 49 54,84	+ 4,331
β Orion.	5 7 2,531	+ 2,8794	— 8 23 13,53	+ 4,563
β Tauri	5 16 26,073	+ 3,7874	+ 28 28 7,94	+ 3,583
α Orion.	5 46 43,630	+ 3,2459	+ 7 22 19,75	+ 1,154
α Can. maj.	6 38 16,286	+ 2,6442	— 16 30 25,83	— 4,574
α Gemin.	7 24 37,842	+ 3,8406	+ 32 13 26,96	— 7,317
α Can. min.	7 31 7,957	+ 3,1462	+ 5 37 9,42	— 8,839
β Gemin.	7 35 45,639	+ 3,6828	+ 28 23 50,05	— 8,205
α Hydrae	9 19 55,152	+ 2,9471	— 7 59 9,02	— 15,339
α Leonis	10 0 3,428	+ 3,2030	+ 12 43 37,47	— 17,366
α Urs. maj.	10 54 2,836	+ 3,7850	+ 62 35 29,60	— 19,326
β Leonis	11 41 5,830	+ 3,0653	+ 15 26 37,94	— 20,092
β Virginis	11 42 34,106	+ 3,1243	+ 2 38 35,78	— 20,298
γ Urs. maj.	11 45 36,059	+ 3,2033	+ 54 33 42,22	— 20,035
α Virginis	13 16 58,910	+ 3,1481	— 10 20 43,90	— 18,990
η Urs. maj.	13 41 23,308	+ 2,3764	+ 50 5 37,59	— 18,149
α Bootis	14 8 32,828	+ 2,7326	+ 19 59 49,83	— 18,958
1 α Librae	14 42 4,097	+ 3,3030	— 15 20 42,09	— 15,330
2 α Librae	14 42 15,503	+ 3,3049	— 15 23 23,13	— 15,300
β Urs. min.	14 51 13,602	— 0,2774	+ 74 47 33,96	— 14,761
α Coronae	15 28 5,019	+ 3,5369	+ 27 14 35,70	— 12,413

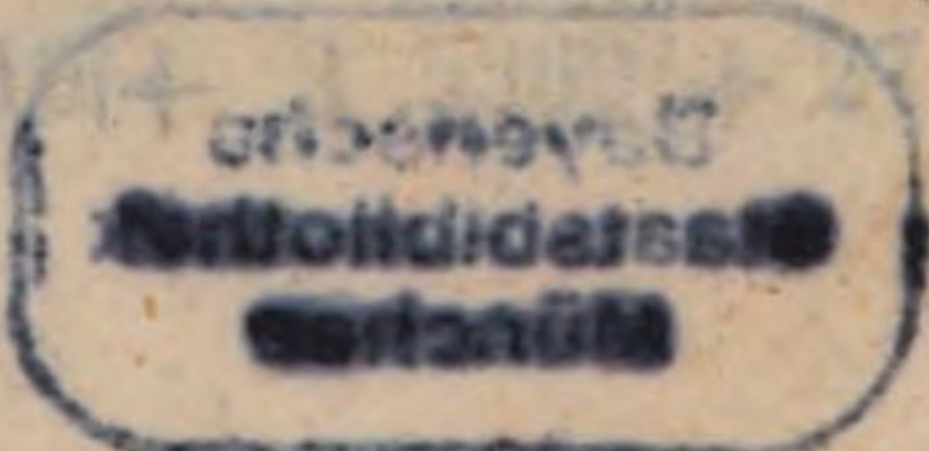
Namen.	Mittl. A. R.	Jährl. Veränd.	Mittl. Decl.	Jährl. Veränd.
α Serpentis	15 ^h 36' 35",290	+ 2",9504	+ 6° 55' 12",87	— 11",708
α Scorpii	16 19 51 ,117	+ 3 ,6647	— 26 4 49 ,18	— 8 ,533
α Herculis	17 7 32 ,175	+ 2 ,7313	+ 14 34 20 ,84	— 4 ,522
α Ophiuchi	17 27 41 ,589	+ 2 ,7778	+ 12 40 41 ,83	— 3 ,029
γ Draconis	17 52 59 ,245	+ 1 ,3934	+ 51 30 32 ,94	— 0 ,670
α Lyrae	18 31 39 ,403	+ 2 ,0303	+ 38 38 29 ,69	+ 3 ,032
γ Aquilae	19 38 50 ,613	+ 2 ,8548	+ 10 14 13 ,93	+ 8 ,377
α Aquilae	19 43 10 ,278	+ 2 ,9284	+ 8 27 37 ,83	+ 9 ,094
β Aquilae	19 47 39 ,075	+ 2 ,9498	+ 6 1 15 ,62	+ 8 ,577
1 α Capric.	20 8 59 ,809	+ 3 ,3316	— 12 59 10 ,45	+ 10 ,680
2 α Capric.	20 9 23 ,728	+ 3 ,3362	— 13 1 27 ,69	+ 10 ,708
α Cygni	20 36 6 ,875	+ 2 ,0417	+ 44 43 30 ,63	+ 12 ,617
α Cephei	21 14 51 ,147	+ 1 ,4395	+ 61 55 32 ,09	+ 15 ,055
β Cephei	21 26 37 ,444	+ 0 ,8082	+ 69 52 34 ,28	+ 15 ,669
α Aquarii	21 57 46 ,165	+ 3 ,0830	— 1 4 32 ,13	+ 17 ,252
α Pisc. austr.	22 49 1 ,237	+ 3 ,3361	— 30 26 56 ,18	+ 18 ,872
α Pegasi	22 56 59 ,625	+ 2 ,9822	+ 14 22 1 ,59	+ 19 ,787
Polaris	1 3 18 ,002	+ 16 ,8860	+ 88 28 39 ,24	+ 19 ,298
δ Urs. min.	18 22 39 ,135	— 19 ,2545	+ 86 35 37 ,48	+ 1 ,994

Druck von F. P. Meißner in Leipzig

Bayernische
Staatsbibliothek
München

Namen.	Mitt. A. R.	Jahr.	Mitt. Dec.	Jahr.
α Serpenti	15° 38' 35"	200 +	3° 35' 04 +	6° 55' 15" 87
α Serpenti	16 19 51	117 +	3 06 47	26 4 49 18
α Herculis	17 7 35	175 +	3 73 13	14 34 30 84
α Ophiuchi	17 27 41	280 +	3 77 18	12 40 41 83
γ Draconis	17 52 59	245 +	1 39 34	21 30 32 94
α Lyrae	18 31 39	403 +	3 03 03	28 38 29 69
γ Andrae	19 38 50	613 +	3 22 48	10 14 13 93
α Andrae	19 43 10	278 +	3 02 24	8 27 37 83
β Andrae	19 47 39	072 +	3 04 08	6 1 15 62
1α Capric	20 8 59	209 +	3 33 16	12 29 10 45
2α Capric	20 9 23	728 +	3 33 02	13 1 27 69
α Cygni	20 36 6	873 +	3 04 17	44 19 30 63
α Cephei	21 14 51	147 +	1 43 35	61 25 32 99
β Cephei	21 25 37	444 +	0 50 22	69 25 34 28
α Aquarii	21 57 46	162 +	3 08 30	1 4 32 13
α Pisc. austr.	22 49 1	237 +	3 33 51	30 26 26 18
α Pegasi	22 56 59	625 +	3 38 22	14 25 1 29
Polaris	1 3 18	002 +	16 88 00	28 28 39 24
δ Urs. min.	18 22 39	132 -	10 22 42	86 32 37 48
1α 1	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 2	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 3	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 4	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 5	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 6	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 7	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 8	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 9	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 10	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 11	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 12	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 13	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 14	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 15	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 16	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 17	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 18	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 19	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 20	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 21	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 22	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 23	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 24	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 25	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 26	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 27	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 28	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 29	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 30	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 31	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 32	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 33	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 34	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 35	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 36	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 37	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 38	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 39	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 40	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 41	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 42	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 43	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 44	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 45	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 46	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 47	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 48	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 49	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 50	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 51	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 52	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 53	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 54	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 55	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 56	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 57	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 58	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 59	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 60	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 61	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 62	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 63	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 64	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 65	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 66	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 67	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 68	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 69	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 70	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 71	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 72	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 73	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 74	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 75	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 76	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 77	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 78	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 79	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 80	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 81	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 82	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 83	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 84	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 85	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 86	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 87	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 88	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 89	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 90	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 91	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 92	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 93	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 94	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 95	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 96	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 97	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 98	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 99	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4
1α 100	15 1 1	127 +	4 12 7	14 15 4

Druck von C. P. Melzer in Leipzig.





Grunert, Johann August,

Versuch einer neuen Methode zur Bestimmung der Polhöhe oder geographischen
Breite bei geodätischen Messungen

Leipzig 1844

BHS II K 42

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10708132-4